Лабораторная работа №4

Тема: **Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений в MsExcel**

Цель работы: Изучение возможностей пакета Ms Excel при решении нелинейных уравнений**.** Приобретение навыков решения нелинейных уравнений средствами пакета.

1. Найти корни полинома.
2. Найти решение нелинейного уравнения.
3. Решить систему нелинейных уравнений

Варианты к заданию

1. Найти корни полинома

№	уравнение	№	уравнение
1	$5x^3-8x^2-8x+5=0$	5	$x^3-2x^2-6x+4=0$
2	$-x^4+5x^3+2x^2-15x-9=0$	6	$2x^4-x^2-10=0;$
3	$x^3-2x^2-x+1=0$	7	$x^3-3x^2-8x+12=0$
4	$x^4-3x^3-8x^2+2=0$	8	$0{,}5x^4-12x^3+15x-5=0$

2. Найти решение нелинейного уравнения

№	уравнение	№	уравнение
1	$x-2\sin(x+0{,}5)=0$	5	$x^2-\ln(x+2)=6$
2	$x^2-lg(x+2)=0$	6	$\frac{4}{x}+x^2=8$
3	$0{,}8x^2-\sin(10x)=0$	7	$3\ln(x)-4\cos(x)=3$
4	$x^3-2\sin x=0{,}5$	8	$0{,}5x^2-\frac{1}{x+6}=6$

3. Найти решение системы нелинейных уравнений.

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases}\sin(x+1)-y=1{,}2;\\ 2x+\cos y=2.\end{cases}$	5	$\begin{cases}\sin(x+2)-y=1{,}5;\\ x+\cos(y-2)=0{,}5.\end{cases}$
2	$\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}5;\\ x-\cos y=3.\end{cases}$	6	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)-y=2;\\ \sin y-2x=1.\end{cases}$
3	$\begin{cases}\sin x+2y=2;\\ \cos(y-1)+x=0{,}7;\end{cases}$	7	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)-y=1;\\ \sin y-2x=1{,}6.\end{cases}$
4	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1;\\ \cos(y-2)+x=0.\end{cases}$	8	$\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}5;\\ x-\cos y=3.\end{cases}$

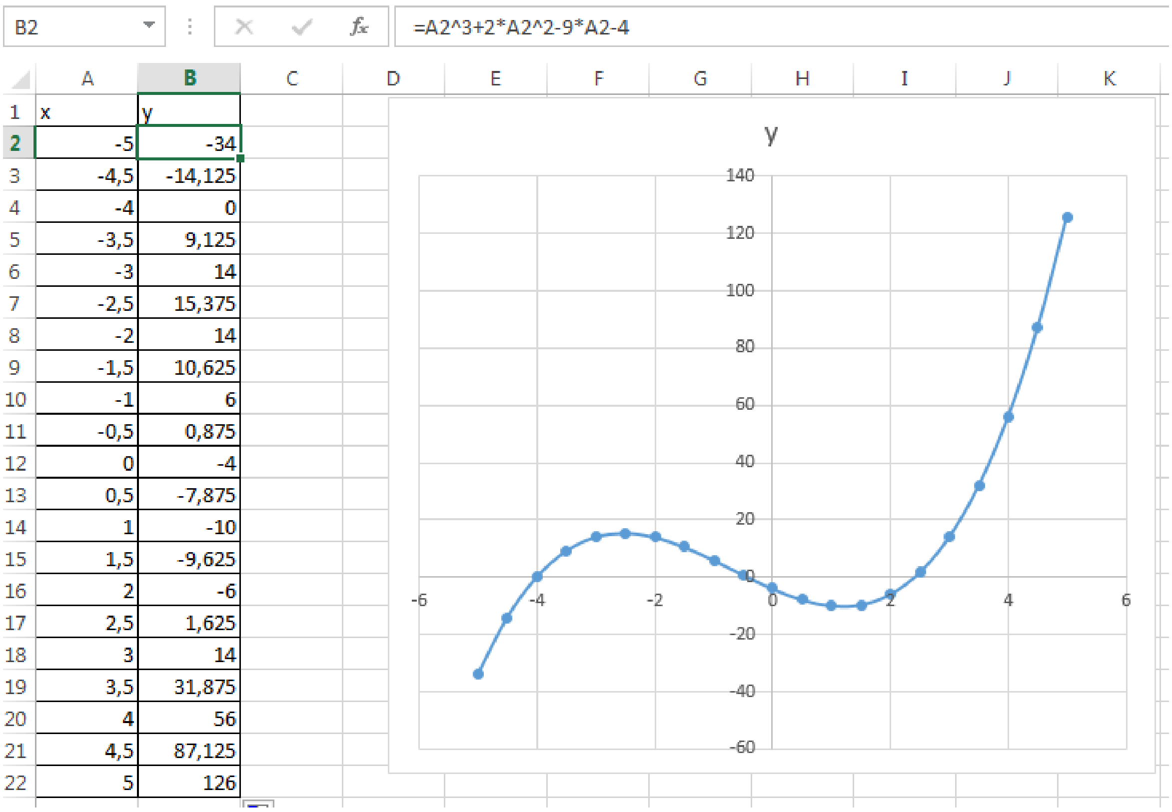
ПРИМЕР 1. Найти корни полинома $x^3 + 2x^2 - 9x - 4 = 0$.

Для начала решим уравнение графически. Известно, что графическим решением уравнения *f(x)=0* является точка пересечения графика функции *f(x)* с осью абсцисс, т.е. такое значение *x*, при котором функция обращается в ноль.

Проведем табулирование нашего полинома на интервале от -4 до 4 с шагом 0,5 (после построение графика может быть придется изменить начальное или конечное значение диапазона, а также шаг).

Затем в ячейку **B2** введем формулу для расчета значений полинома (рис. 1): **=A2^3+2*A2^2-9*A2-4.**

На графике видно, что функция три раза пересекает ось *Ox*, а так как полином третьей степени имеется не более трех действительных корней, то графическое решение поставленной задачи найдено. Иначе говоря, была проведена локализация корней, один корень *x*=-4 виден явно из таблицы, два других корня находятся на интервалах: [-0,5,0], [2, 2,4].



	A	B
1	x	y
2	-5	-34
3	-4,5	-14,125
4	-4	0
5	-3,5	9,125
6	-3	14
7	-2,5	15,375
8	-2	14
9	-1,5	10,625
10	-1	6
11	-0,5	0,875
12	0	-4
13	0,5	-7,875
14	1	-10
15	1,5	-9,625
16	2	-6
17	2,5	1,625
18	3	14
19	3,5	31,875
20	4	56
21	4,5	87,125
22	5	126

Рисунок 1

Теперь можно найти корни полинома методом последовательных приближений с помощью команды **Сервис→Подбор параметра.** Относительная погрешность вычислений и предельное число итераций (например, 0,00001 и 1000) задаются на вкладке **Сервис→Параметры.**

В качестве начальных значений приближений к корням можно взять любые точки из отрезков локализации корней. Пусть это будут -0,3 и 2,2. Введем эти значения в ячейки **B25** и **B26**, затем в ячейку **C25** (рис. 2) введем формулу: **=B26^3+2*B26^2-9*B26-4**, которую скопируем в ячейки **C26** при помощи маркера заполнения.

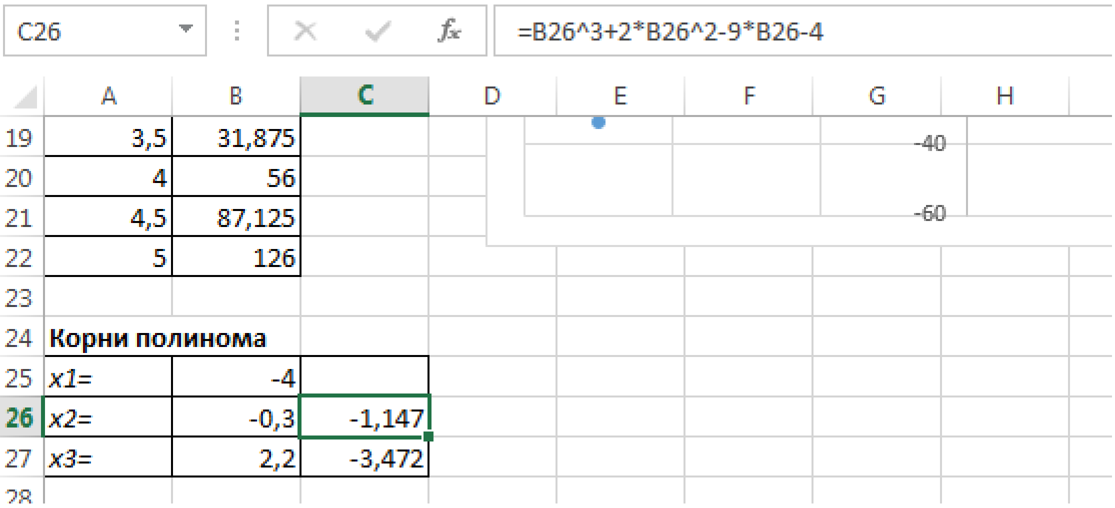


Рисунок 2

После ввода начальных приближений и значений функции можно обратиться к пункту меню **Сервис – Подбор параметра** в Excel 2003 или **Данные – Анализ «что если» – Подбор параметра** в Excel2007-20016 (рис. 3) и заполнить диалоговое окно следующим образом (рис. 4), т.е мы хотим найти значение аргумента, при котором значение функции будет равно нулю.

В поле **Установить в ячейке** дается ссылка на ячейку в которую введена формула, вычисляющая значение левой части уравнения (уравнение должно быть записано так, чтобы его правая часть не содержала переменную). В поле **Значение** вводим правую часть уравнения, а в поле **Изменяя значения ячейки** дается ссылка на ячейку, отведенную под переменную. Заметим, что вводить ссылки на ячейки в поля диалогового окна **Подбор параметров** удобнее не с клавиатуры, а щелчком на соответствующей ячейке.

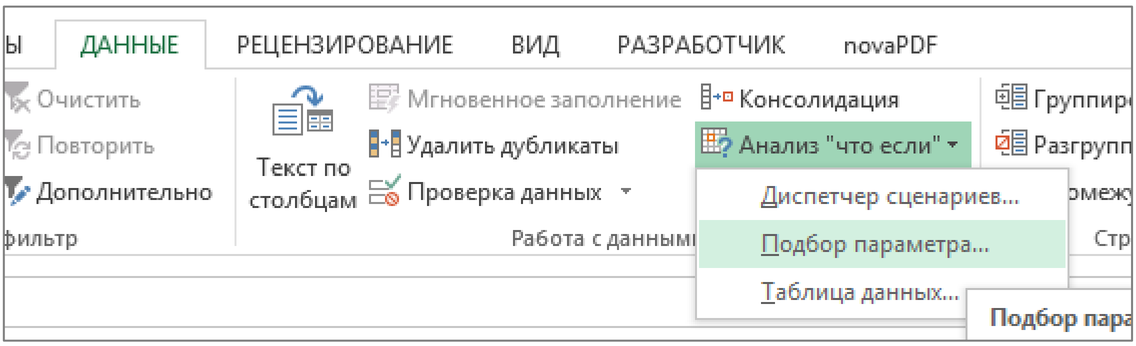


Рисунок 3

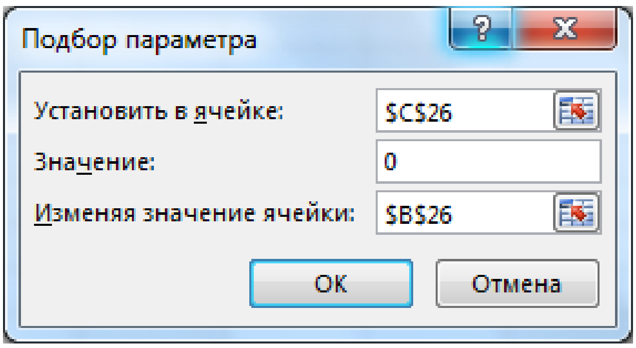


Рисунок 4

После нажатия кнопки **ОК** появится диалоговое окно **Результат подбора параметра** (рис. 5) с сообщением об успешном завершении поиска решения и приближенное значение корня будет помещено в ячейку **C25**.

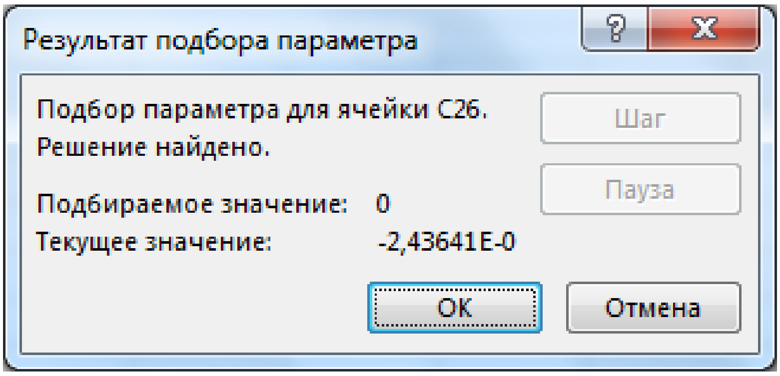


Рисунок 5

Второй корень находим аналогично.

Результаты вычислений будут помещены в ячейки **C25** и **C26 (**рис. 6)**.**

	A	B	C
19	3,5	31,875	
20	4	56	
21	4,5	87,125	
22	5	126	
23			
24	**Корни полинома**		
25	*x1=*	-4	0
26	*x2=*	-0,41421	-2,4E-06
27	*x3=*	2,41418	-0,0006

Рисунок 6

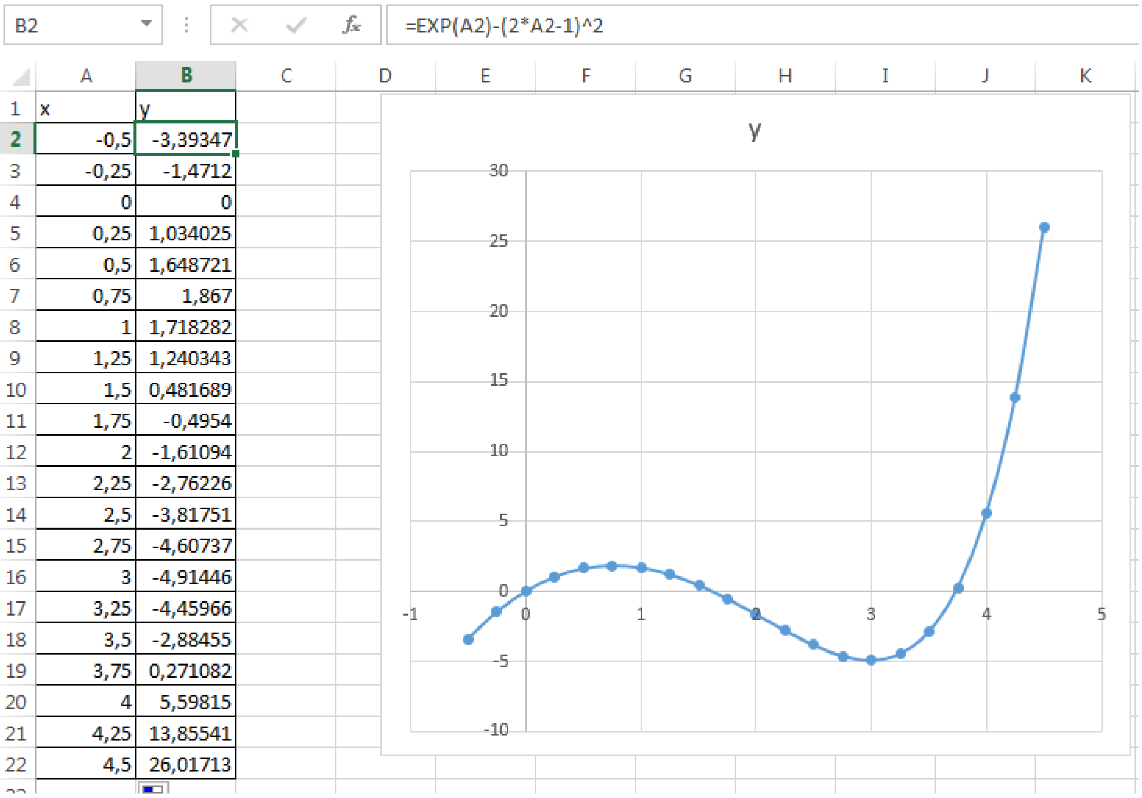
<u>ПРИМЕР 2</u>. Решить уравнение $e^x - (2x-1)^2 = 0$.

Проведем локализацию корней нелинейного уравнения.

Графическим решением уравнения $e^x - (2x-1)^2 = 0$. Для этого построим график функции (рис. 7). Для этого в диапазон **A2:A22** введем значения аргумента. В ячейку **B2** введем формулу для вычисления значений функции: **=EXP(A2)-(2*A2-1)^2.**

На графике видно, что график функции пересекает ось *Ox* три раза. Одно из решений может быть вычислено точно: *x=0.*

Для второго корня можно определить интервал изоляции корня: $1{,}5 < x < 2$.



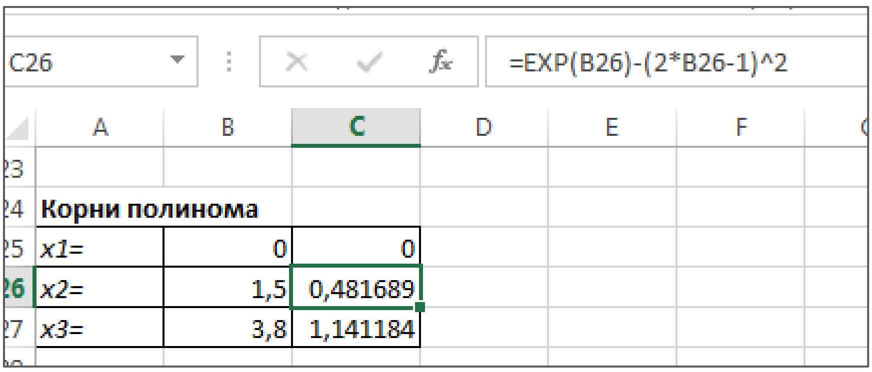
B2 =EXP(A2)-(2*A2-1)^2

	A	B
1	x	y
2	-0,5	-3,39347
3	-0,25	-1,4712
4	0	0
5	0,25	1,034025
6	0,5	1,648721
7	0,75	1,867
8	1	1,718282
9	1,25	1,240343
10	1,5	0,481689
11	1,75	-0,4954
12	2	-1,61094
13	2,25	-2,76226
14	2,5	-3,81751
15	2,75	-4,60737
16	3	-4,91446
17	3,25	-4,45966
18	3,5	-2,88455
19	3,75	0,271082
20	4	5,59815
21	4,25	13,85541
22	4,5	26,01713

Рисунок 7

Теперь можно найти корень уравнения на отрезке [1.5,2] методом последовательных приближений**.**

Введём начальное приближение в ячейку **B25=1,5**, и само уравнение, со ссылкой на начальное приближение, в ячейку **C25 =EXP(B26)-(2*B26-1)^2 (**рис. 8).



C26 =EXP(B26)-(2*B26-1)^2

	A	B	C
24	**Корни полинома**		
25	*x1=*	0	0
26	*x2=*	1,5	0,481689
27	*x3=*	3,8	1,141184

Рисунок 8

Далее воспользуемся инструментом **Подбор параметра** и заполним диалоговое окно **Подбор параметра** (рис. 9).

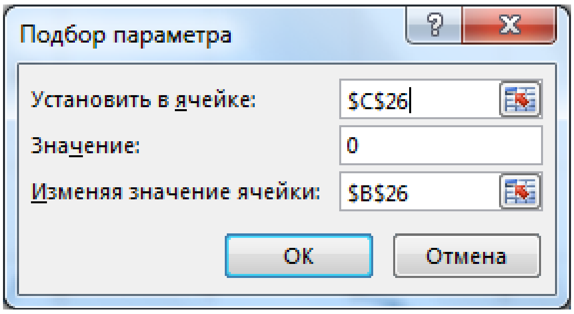


Рисунок 9

Результат поиска решения будет выведен в ячейку **C25** (рис. 10). Третий корень находим аналогично

23			
24	**Корни полинома**		
25	*x1=*	0	0
26	*x2=*	1,629052	3,14E-06
27	*x3=*	3,733359	0,000909
28			

Рисунок 10

ПРИМЕР 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin(2x+y)+1{,}2x=0{,}2; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$.

Рассмотрим, как можно решить систему уравнений $\begin{cases} F1(x)=0, \\ F2(x)=0, \\ \ldots \\ Fn(x)=0 \end{cases}$

с помощью решающего блока (пункт меню **Сервис→Поиск Решения**), который позволяет решать не только оптимизационные задачи, но и обычные уравнения и системы уравнений. Для решения этой задачи ее можно сформулировать одним из способов:

- Найти минимум функции $\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n} F_i^2(x)=F_1^2(x)+F_2^2(x)+\ldots F_n^2(x)$. В этом случае задача решается без ограничений.

Но, прежде чем воспользоваться описанным выше методом решения систем уравнений, найдем графическое решение этой системы. Отметим, что оба уравнения системы заданы неявно и для построения графиков, функций соответствующих этим уравнениям, необходимо разрешить заданные уравнения относительно переменной *y*.

Для первого уравнения системы имеем:

$$(\sin(2x+y)+1{,}2x=0{,}2)\Rightarrow(\sin(2x+y)=0{,}2-1{,}2x)\Rightarrow(y=\arcsin(0{,}2-1{,}2x)-2x).$$

Определим ОДЗ полученной функции:

$$\left(-1 \le |0{,}2-1{,}2x| \le 1\right) \Rightarrow \begin{cases} 0{,}2-1{,}2x \le 1 \\ 0{,}2-1{,}2x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1{,}2x \le 0{,}8 \\ -1{,}2x \ge -1{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -0{,}667 \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-0{,}667;1\right)$$

Второе уравнение данной системы описывает окружность.

На рис. 11 приведен фрагмент рабочего листа MS Excel с формулами, которые необходимо ввести в ячейки для построения линий, описанных уравнениями системы. Точки пересечения линий изображенных на рис. 12 являются графическим решением системы нелинейных уравнений.

	A	B	C	D
1	-1	=(1-A1^2)^0,5	=-((1-A1^2)^0,5)	
2	-0,9	=(1-A2^2)^0,5	=-((1-A2^2)^0,5)	
3	-0,8	=(1-A3^2)^0,5	=-((1-A3^2)^0,5)	
4	-0,7	=(1-A4^2)^0,5	=-((1-A4^2)^0,5)	
5	-0,6	=(1-A5^2)^0,5	=-((1-A5^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A5)-2*A5
6	-0,5	=(1-A6^2)^0,5	=-((1-A6^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A6)-2*A6
7	-0,4	=(1-A7^2)^0,5	=-((1-A7^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A7)-2*A7
8	-0,3	=(1-A8^2)^0,5	=-((1-A8^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A8)-2*A8
9	-0,2	=(1-A9^2)^0,5	=-((1-A9^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A9)-2*A9
10	-0,1	=(1-A10^2)^0,5	=-((1-A10^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A10)-2*A10
11	0	=(1-A11^2)^0,5	=-((1-A11^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A11)-2*A11
12	0,1	=(1-A12^2)^0,5	=-((1-A12^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A12)-2*A12
13	0,2	=(1-A13^2)^0,5	=-((1-A13^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A13)-2*A13
14	0,3	=(1-A14^2)^0,5	=-((1-A14^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A14)-2*A14
15	0,4	=(1-A15^2)^0,5	=-((1-A15^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A15)-2*A15
16	0,5	=(1-A16^2)^0,5	=-((1-A16^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A16)-2*A16
17	0,6	=(1-A17^2)^0,5	=-((1-A17^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A17)-2*A17
18	0,7	=(1-A18^2)^0,5	=-((1-A18^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A18)-2*A18
19	0,8	=(1-A19^2)^0,5	=-((1-A19^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A19)-2*A19
20	0,9	=(1-A20^2)^0,5	=-((1-A20^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A20)-2*A20
21	1	=(1-A21^2)^0,5	=-((1-A21^2)^0,5)	=ASIN(0,2-1,2*A21)-2*A21

Рисунок 11

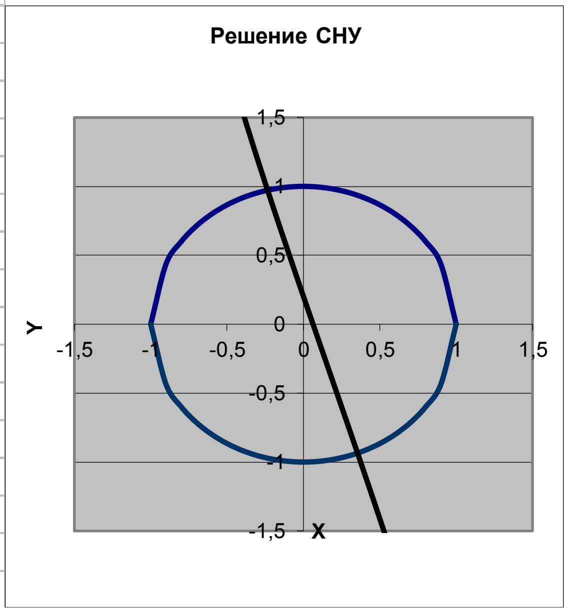


Рисунок 12

Не трудно заметить, что заданная система имеет два решения. Поэтому процедуру поиска решений системы необходимо выполнить дважды, предварительно определив интервал изоляции корней по осям Ox и Oy.

В нашем случае первый корень лежит в интервалах $(-0.5;0)_x$ и $(0.5;1)_y$, а второй - $(0;0.5)_x$ и $(-0.5;-1)_y$.

Далее поступим следующим образом. Введем начальные значения переменных *x* и *y*, формулы отображающие уравнения системы и функцию цели, так как показано на рис. 13.

	A	B	C
23	x=	-0,5	=B23^2+B24^2-1
24	y=	0,5	=SIN(2*B23+B24)+1,2*B23-0,2
25			=C23^2+C24^2
26			
27	x=	0,5	=B27^2+B28^2-1
28	y=	-0,5	=SIN(2*B27+B28)+1,2*B27-0,2
29			=C27^2+C28^2

Рисунок 13

Теперь дважды воспользуемся командой **Сервис→Поиск Решения**, заполняя появляющиеся диалоговые окна, так как показано на рис. 14 и 15.

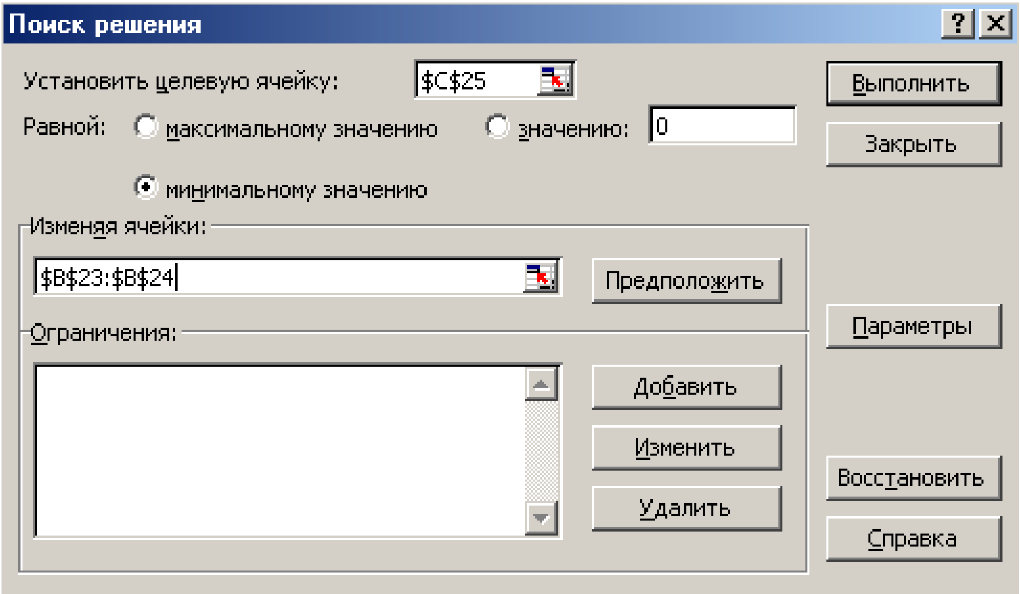


Рисунок 14

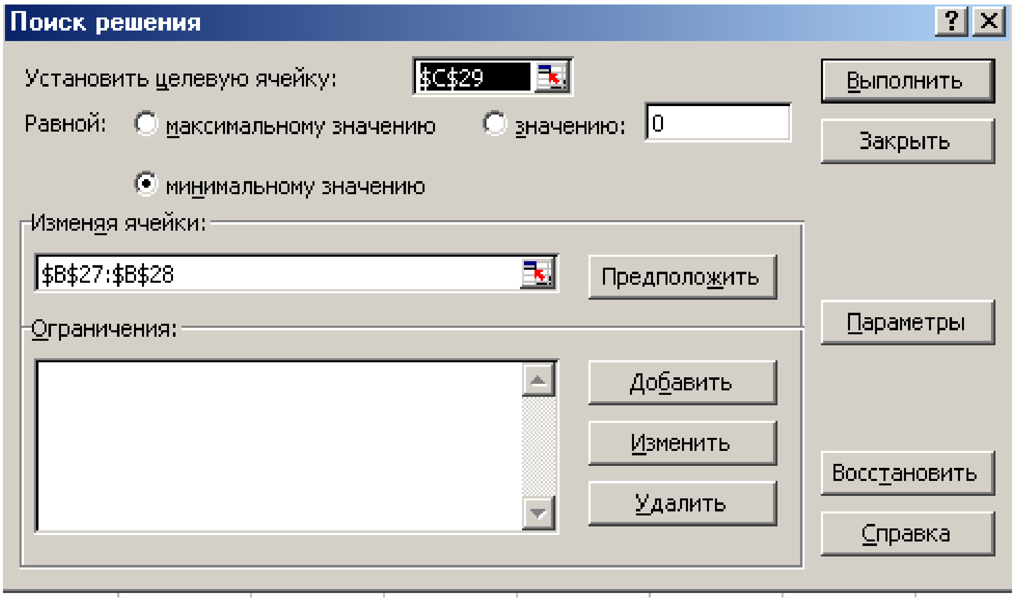


Рисунок 15

На рис. 16 приведены результаты вычислений. Сравнив полученное решение системы с графическим, убеждаемся, что система решена верно.

	A	B	C
23	**x=**	-0,23	-1,79E-08
24	**y=**	0,97	3,02E-08
25			1,234E-15
26			
27	**x=**	0,35	-3,27E-08
28	**y=**	-0,94	-3,46E-08
29			2,264E-15

Рисунок 16