Лабораторная работа

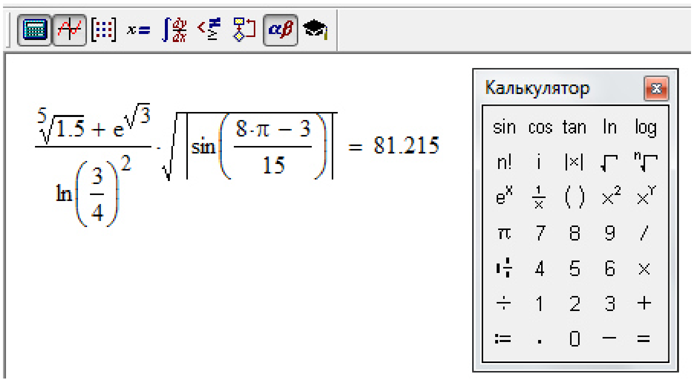
1. Задание 1. Вычисления в MathCAD.

Необходимо выполнить следующие расчеты:

1.1.Выполнить расчет по формуле			
Вариант	Формула	Вариант	Формула
1.	$e^{\sin\frac{3}{1.6}}\sqrt{\left\|\cos^3\frac{\sqrt[3]{10}}{\pi}\right\|}$	2.	$\frac{\sqrt[3]{7}}{\ln^2 1.2}-\sqrt{\left\|\cos\frac{\pi}{9}\right\|}$
3.	$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{7.2}-\sin^2\frac{2\pi}{5}}}{7!}$	4.	$\frac{3+\sqrt[5]{8.6}}{\ln^2 3.2}\sqrt{\left\|\cos\frac{3}{\pi}\right\|}$
5.	$\frac{3-\sqrt[3]{13.5}}{\ln^2\frac{3}{4}}\sqrt{\left\|\sin\frac{\pi}{10}\right\|}$	6.	$\frac{3}{4}e^{\sin\frac{\pi}{8}}+\sqrt{\left\|\lg^3\frac{2\pi}{9}\right\|}$
7.	$\frac{2+\sqrt[4]{7}}{\ln^3 1.2}\sqrt{\left\|\cos^5\frac{7\pi}{9}\right\|}$	8.	$\frac{2.1+\sqrt{\left\|3^2-\sin\frac{\pi}{7}\right\|}}{\sqrt[3]{3!}}$
1.2.Определить функцию $f(x)$ для вычисления выражения. Вычислить значение функции в точках $x_n \le x \le x_k$ с шагом Δx. Значения x_n, x_k, Δx задать самостоятельно			
1.	$f(x)=\frac{1-\ln(\|e^x+\cos x\|)}{2}$	2.	$f(x)=\sqrt[3]{13+x^4}-2^x$
3.	$f(x)=\left\|\frac{x}{3}-(x-3{,}4)^{x^2-10}\right\|$	4.	$f(x)=\sqrt[7]{e^x}+\|\cos x^3-2\|$
5.	$f(x)=\frac{\cos x}{e^x}-\sqrt[7]{2+\sqrt{e^{3x}}}$	6.	$f(x)=\sqrt[5]{(x+2{,}9)^2}-\frac{e^x+\cos x}{2}$
7.	$f(x)=\sqrt[3]{\frac{1+3x^6}{1+x^2}}$	8.	$f(x)=\sin^3\frac{x}{x^2+1}-\sqrt[5]{2+x}$
9.		10.	

Рекомендации к выполнению задания 1 .

<u>Пример 1.</u> Найти значение выражения $\frac{\sqrt[5]{1.5+e^{\sqrt{3}}})}{\ln^2\frac{3}{4}}\sqrt{\left|\sin\frac{8\pi-3}{15}\right|}$.



Пример 2. Вычислить $a=\sqrt{\frac{3\pi}{3.2^2}}, \beta=\frac{a+1}{4\sqrt{e^3}}, \gamma=tg^2\left|\frac{a+\beta}{a-\beta}\right|$.

$$a := \sqrt{\frac{3\cdot\pi}{3.2^2}} \qquad \beta := \frac{a+1}{4\cdot\sqrt{e^3}} \qquad \gamma := \tan\left(\left|\frac{a+\beta}{a-\beta}\right|\right) \qquad \gamma = 3.083$$

Пример 3. Задать переменную x в диапазоне от $x_п=-5$ до $x_к=5$ с шагом $\Delta x=0{,}5$. Вычислить значение функции $f(x)$ при всех значениях переменной x

$$f(x) := \frac{\left(x^4+\sqrt[5]{x^2}\right)}{\cos(x)+4}$$

$$x := -5, -4.5 .. 5$$

x =	f(x) =
-5	146.348
-4.5	108.7
-4	77.021
-3.5	49.522
-3	27.426
-2.5	12.662
-2	4.833
-1.5	1.533
-1	0.44
-0.5	0.168
0	0
0.5	0.168
1	0.44
1.5	1.533
2	4.833
...	...

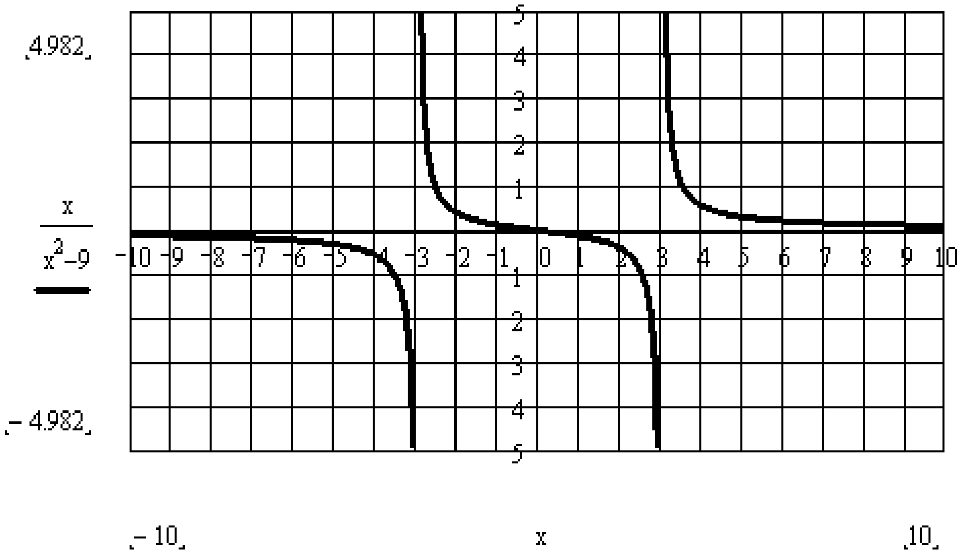
2. Задание 2. Построение графиков в MathCAD

2.1.Построить графики функций в декартовых координатах			
Вариант	*f1(x)*	*f2(x)*	*f3(x)*
1.	$\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$	$\frac{4x^2+5}{4x+8}$	$y^2 - 2x^2 - 4$
2.	$\sqrt[3]{x(x^2+2)^2}$	$\frac{x^3-4x}{3x^2-4}$	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}-1$
3.	$\sqrt[3]{(6+x)x^2}$	$\frac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$	$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}-1$
4.	$\sqrt[3]{x^2(x-6)}$	$\frac{2x^2-3x+1}{1-2x}$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1$
5.	$\sqrt[3]{x(x+3)^2}$	$\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$	$y^2 + 4x^2 - 4$

6.	$\sqrt[3]{(3+x)x^2}$	$\dfrac{x^2-11}{4x-3}$	$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}-1$
7.	$\sqrt[3]{x^2(x^2+2)^2}$	$\dfrac{4x^3+3x^2-2x-2}{x^2-1}$	$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}-1$
8.	$\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$	$\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$	$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-1$

Рекомендации к выполнению задания 2.

Пример 4. Построить график функции $y=x/(x^2-9)$



Пример 5. Построить график функции заданной неявно: $5x^2+3y^2-15=0$.

Приведем уравнение к каноническому виду, разделив обе его части на 15. Получим зависимость, описывающую эллипс: $x^2/3+y^2/5=1$. Для построения эллипса выполним следующие действия:

- введем уравнение;
- разрешим его относительно переменной y: выделим y и выполним команду **Simbolics\Variable\Solve** (**Символьные операции\Переменная\Решить**);
- тем же способом найдем решения полученных уравнений, для того чтобы знать область допустимых значений функции;
- зададим ранжированную перемену для более точного построения графика;
- определим функции, описывающие верхнюю и нижнюю части эллипса;
- построим график двух функций.

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$$

Выражение y через x

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot\left(-15\cdot x^2 + 45\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{3}\cdot\left(-15\cdot x^2 + 45\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Решения уравнения

$$-15\cdot x^2 + 45 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3^{\frac{1}{2}} \\ -3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

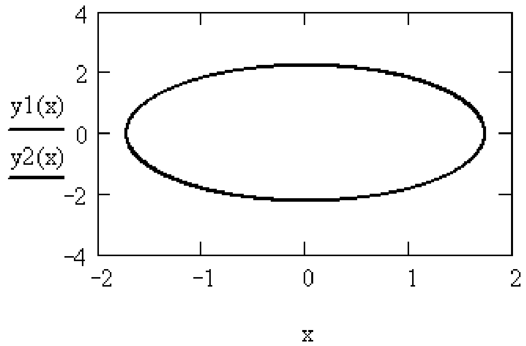
Определение значения аргумента функции

$$x := -2, -1.999 .. 2$$

Задание уравнений верхней и нижней частей эллипса

$$y1(x) := \frac{1}{3}\cdot\left(-15\cdot x^2 + 45\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y2(x) := \frac{-1}{3}\cdot\left(-15\cdot x^2 + 45\right)^{\frac{1}{2}}$$



3. Задание 3. Решение задач линейной алгебры

3.1.Решить систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы			
№	СЛАУ	№	СЛАУ
1.	$\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

3.2.Выполнить действия с матрицами			
№	**СЛАУ**	№	СЛАУ
1.	**2 (A + B) 2B** $2(A+B)2B^T$, $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\4&5&2\\-1&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&5\\0&1&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$	2.	$(A-B)^T+2B$, $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\0&2&-1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&7&-2\\1&1&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$
3.	$3A-(A+2B)^T$, $A=\begin{pmatrix}4&5&-2\\3&-1&0\\4&2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&3\\5&7&3\end{pmatrix}$	4.	$(A-B^T)B$, $A=\begin{pmatrix}5&2&0\\10&4&1\\7&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&6&-1\\-1&-2&0\\2&1&3\end{pmatrix}$
5.	$2(A^T-B)A^2$, $A=\begin{pmatrix}3&2&-5\\4&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&4\\0&3&2\\-1&-3&4\end{pmatrix}$	6.	$2(A-0{,}5B)^T$, $A=\begin{pmatrix}5&3&-1\\2&0&4\\3&5&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&16\\-3&-2&0\\5&7&2\end{pmatrix}$
7.	$(A^2-B^T)B$, $A=\begin{pmatrix}7&2&0\\-7&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$	8.	$(A-B)A+3B^T$, $A=\begin{pmatrix}5&1&7\\-10&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&1&0\\7&2&1\end{pmatrix}$

Рекомендации к выполнению лабораторной работы.

Решение *систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*.

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\&\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n.\end{aligned}$$

Эту систему можно представить в матричном виде: **AX=b**, где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\cdots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы уравнений;

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$ – вектор неизвестных, $$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{pmatrix}$$ – вектор правых частей.

При выполнении лабораторной работы систему линейных алгебраических уравнений необходимо будет решать методом обратной матрицы и методом Крамера. Вспомним основные формулы, используемые в этих методах.

Метод обратной матрицы.

Систему линейных алгебраических уравнений **Ax=b** умножим слева на матрицу, обратную к **A**. Система уравнений примет вид:

$$\mathbf{A^{-1}\cdot A\cdot x=A^{-1}\cdot b,\ E\cdot x=A^{-1}\cdot b,}\ (\text{E – единичная матрица})$$

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\mathbf{x=A^{-1}\cdot b}$.

<u>Пример 6</u>. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Идея решение СЛАУ методом обратной матрицы заключается в следующем. Заданную систему записывают в матричной форме **Ax=b**, где **A** – матрица коэффициентов СЛАУ при неизвестных, **b** – вектор правых частей, **x** – вектор неизвестных, который вычисляют по формуле $\mathbf{x=A^{-1}\cdot b}$, причем $\mathbf{A^{-1}}$– это матрица обратная к **A**.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ

$$X := A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -2.833 \\ 15.167 \\ 4.167 \end{pmatrix}$$

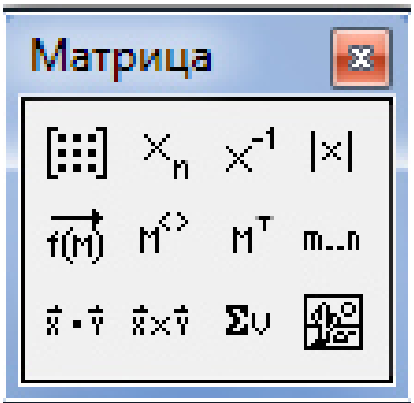
Проверка

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 3.553\times 10^{-15} \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Пример 7</u>. Выполнить действия с матрицами

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$Y := A^{T} - (A + B)^{2} = \begin{pmatrix} -50 & 11 & -118 \\ -48 & -15 & -90 \\ -3 & 11 & -99 \end{pmatrix}$$



4. ЗАДАНИЕ 4. Решить нелинейное уравнение

№	уравнение	№	уравнение
1.	$5x^3-8x^2-8x+5=0$	**2.**	$x^3-2x^2-6x+4=0$
3.	$-x^4+5x^3+2x^2-15x-9=0$	**4.**	$2x^4-x^2-10=0;$
5.	$x^3-2x^2-x+1=0$	**6.**	$x^3-3x^2-8x+12=0$
7.	$x^4-3x^3-8x^2+2=0$	**8.**	$0{,}5x^4-12x^3+15x-5=0$

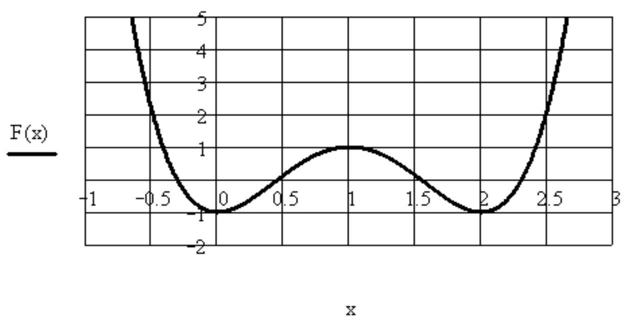
<u>Пример 8.</u> Найти корни полинома $2x^4–8x^3+8x^2–1=0$.
Воспользуемся функцией `polyroots(v)`, которая возвращает вектор всех корней (как вещественных, так и комплексных) полинома *n*–й степени, коэффициенты которого хранятся в массиве `v`, длиной $n+1$.

В нашем случае массив `v` следует определить как вектор столбец из пяти элементов[31](рис. 10). Решим задачу, так как показано на рис. 11. Найдем графическое решение заданного уравнения. Для этого создадим функцию $F(x)$, определив полином как сумму произведений коэффициентов на x в соответствующей степени, и построим ее график. Точки пересечения графика с осью абсцисс и будут корнями уравнения. На рис. 12 видно, что графическое решение совпадает с аналитическим.

Вектор коэффициентов **Корни полинома**

$$V := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -0.307 \\ 0.459 \\ 1.541 \\ 2.307 \end{pmatrix}$$

$$F(x) := \sum_{i=0}^{4} \left(V_i \cdot x^i\right)$$ **Полином:** $V_0+V_1{}^*x+V_2{}^*x^2+V_3{}^*x^3+V_4{}^*x^4$



---

[31] Обратите внимание, что в уравнении отсутствует переменная *x* в первой степени. Это означает, что соответствующий коэффициент равен нулю.

5. Задание 5. Вычисление производной

1. Найти первую и вторую производную функции *f(x)*.

№	f(x)
1	$tg(x^3 + x^2 \sin\frac{2}{x})$
2	$\sin(e^{x^2 \sin\frac{5}{x}} - 1) + x$
3	$\sin(x \sin\frac{3}{x})$
4	$\arcsin(x^2 \cos\frac{1}{9x})$
5	$\ln(1 - \sin(x^3 \sin\frac{1}{x}))$

№	f(x)
6	$2x^2 - x^2 \cos\frac{1}{x}$
7	$x^2 \cos\frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}$
8	$\sqrt{1 + \ln(1 + x^2 \sin\frac{1}{x})} - 1$
9	$\sin(e^{x^2 \sin\frac{5}{x}} + 1)$
10	$\sin x \cos\frac{5}{x}$

Пример 4. Найти первую и вторую производную функции *f(x)*. (Рисуно

$$f(x) := \frac{\cos(x) - \cos(3\cdot x)}{x}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{-\sin(x) + 3\cdot\sin(3\cdot x)}{x} - \frac{\cos(x) - \cos(3\cdot x)}{x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow \frac{-\cos(x) + 9\cdot\cos(3\cdot x)}{x} - 2\cdot\frac{-\sin(x) + 3\cdot\sin(3\cdot x)}{x^2} + 2\cdot\frac{\cos(x) - \cos(3\cdot x)}{x^3}$$

6. Задание 6.Интегрирование.

Вычислить неопределенный интеграл функции:

№	f(t)
1	$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 2{,}5}}$
2	$\frac{t^2}{\sqrt{t + 1{,}2}}$
3	$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$
4	$\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2t + 2{,}5}$
5	$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 2{,}4}}$
6	$\frac{(1 + 0{,}6t^2)}{1{,}4 + \sqrt{2t^2 + 0{,}5}}$
7	$\frac{(1 + 0{,}8t^2)}{1{,}3 + \sqrt{0{,}4t^2 + 2{,}1}}$
8	$\frac{(1 + 0{,}6t^2)}{0{,}7 + \sqrt{0{,}6t^2 + 1{,}5}}$

Вычислить определенный интеграл			
№	**задание**		
1	$\int_{1,6}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$; $\int_{0,5}^{1,9}\frac{\sqrt{0,7x^2+2,3}dx}{3,2+\sqrt{0,8x+1,4}}$;	**5**	$\int_{2,5}^{3,3}\frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1}dx.$ $\int_{1}^{2,2}\frac{\sqrt{0,8x^2+2}dx}{1,6+\sqrt{1,5x+0,6}}$;
2	$\int_{0,6}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$; $\int_{0,6}^{2,2}\frac{\sqrt{1,5x+1}dx}{1,2x+\sqrt{x^2+1,8}}$;	**6**	$\int_{2,1}^{3,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; $\int_{0,2}^{1}\frac{\cos(0,3x+0,8)dx}{0,9+2\sin 0,4x+0,3)}$.
3	$\int_{1,2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$; $\int_{1,0}^{2,6}\frac{\sqrt{x^2+1,3}dx}{1,5x+\sqrt{0,4x+1,7}}$;	**7**	$\int_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(x^2)}{x+1}dx.$ $\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sin(0,6x+0,5)dx}{1,5+\cos(x^2+0,4)}$.
4	$\int_{1,2}^{2}\frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx.$ $\int_{0,6}^{1,4}\frac{\sqrt{x^2+0,5}dx}{2x+\sqrt{x^2+2,5}}$;	**8**	$\int_{0,6}^{0,72}(\sqrt{x}+1)tg\,2x\,dx.$ $\int_{0,4}^{1}\frac{\cos(2x^2+0,5)dx}{0,8+\sin n(x+1,4)}$.

<u>Пример 9.</u> Вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. (

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1}}$$

$$\int f(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot \operatorname{asinh}(2\cdot x - 1)$$

<u>Пример 10.</u> Вычислить определенный интеграл. (Рисунок 10)

$$f(x) := \sin(x)\cdot\sin(2\cdot x)\cdot\sin(3\cdot x) \qquad a := 0 \qquad b := \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.167 \qquad \int_a^b f(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{6}$$