ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Тема: Решение систем линейных уравнений, работа с матрицами

Цель работы: Изучение возможностей пакета Ms Excel при решении задач линейной алгебры. Приобретение навыков решения систем линейных алгебраических уравнений и выполнение действий над матрицами средствами пакета.

ВАРИАНТЫ З А Д А Н И Й

1. Решить систему уравнений методом Крамера.
2. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.
3. Выполнить математические действия над матрицами.

При решении систем уравнений (п.1 и п. 2) обязательно выполнить проверку!

Вариант №1 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$

3) $2(A^T + B)(2B - A)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант №2 1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

3) $3A^T - (A + 2B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант № 3 1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

3) $2(A - B^T)(A^2 + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант №4 1) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

3) $(A^2 - B^2)(A^T + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант №5 1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

3) $(A - B^2)(2A^T + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант №6 1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3) $(A - B^T)A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант №7 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

3) $2(A–0{,}5B^T)+AB$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант №8 1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

3) $(A – B)A + 3B^T$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Методические рекомендации к выполнению задания

Предварительно вспомним некоторые сведения из курса высшей математики, необходимые для выполнения данной лабораторной работы.

Решение *систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*.

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Эту систему можно представить в матричном виде: **AX=b**, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы уравнений;

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$$ – вектор неизвестных, $$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{pmatrix}$$ – вектор правых частей.

При выполнении лабораторной работы систему линейных алгебраических уравнений необходимо будет решать методом обратной матрицы и методом Крамера. Вспомним основные формулы, используемые в этих методах.

Метод обратной матрицы.

Систему линейных алгебраических уравнений **Ax=b** умножим слева на матрицу, обратную к **A**. Система уравнений примет вид:

$$\mathbf{A^{-1}\cdot A\cdot x=A^{-1}\cdot b,\ E\cdot x=A^{-1}\cdot b,}\ (\text{E – единичная матрица})$$

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\mathbf{x=A^{-1}\cdot b}$.

Метод Крамера.

В этом случае неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по формуле:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}$$

где Δ – определитель матрицы **A**, Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы **A** путем замены i-го столбца вектором **b**.

Обратите внимание на особенность работы с матричными формулами: необходимо предварительно выделять область, в которой будет храниться результат, а после получения результата преобразовывать его к матричному виду, нажав клавиши **F2** и **Ctrl+Shift+Enter**.

Теперь рассмотрим решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера на следующих примерах.

<u>ПРИМЕР 3.1.</u> Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}.$$

В этом случае матрица коэффициентов **A** и вектор свободных коэффициентов **b** имеют вид:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&-13&4\\1&0&-2&3\\3&21&0&-5\\4&3&-5&0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\2\\3\end{pmatrix},$$

Введём матрицу **A** и вектор **b** в рабочий лист MS Excel (рис. 3.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	-13	4		-5	
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4	
3		3	21	0	-5		2	
4		4	3	-5	0		3	
5								

Рис. 3.1

В нашем случае матрица **A** находится в ячейках **B1:E4**, а вектор **b** в диапазоне **G1:G4**. Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к **A**. Для этого выделим ячейки для хранения обратной матрицы (**это нужно сделать обязательно!!!**); пусть в нашем случае это будут ячейки **B6:E9**. Теперь обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МОБР,** предназначенную для вычисления обратной матрицы (рис. 3.2), щелкнув по кнопке **OK**, перейдём ко второму шагу мастера функций. В диалоговом окне, появляющемся на втором шаге мастера функций, необходимо заполнить поле ввода **Массив** (рис. 3.3). Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица - в нашем случае **B1:E4**. Данные в поле ввода **Массив** можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши.

Если поле **Массив** заполнено, можно нажать кнопку **OK.** В первой ячейке, выделенного под обратную матрицу диапазона, появится некое число. **Для того чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае рабочая книга MS Excel примет вид изображенный на рис. 3.4.

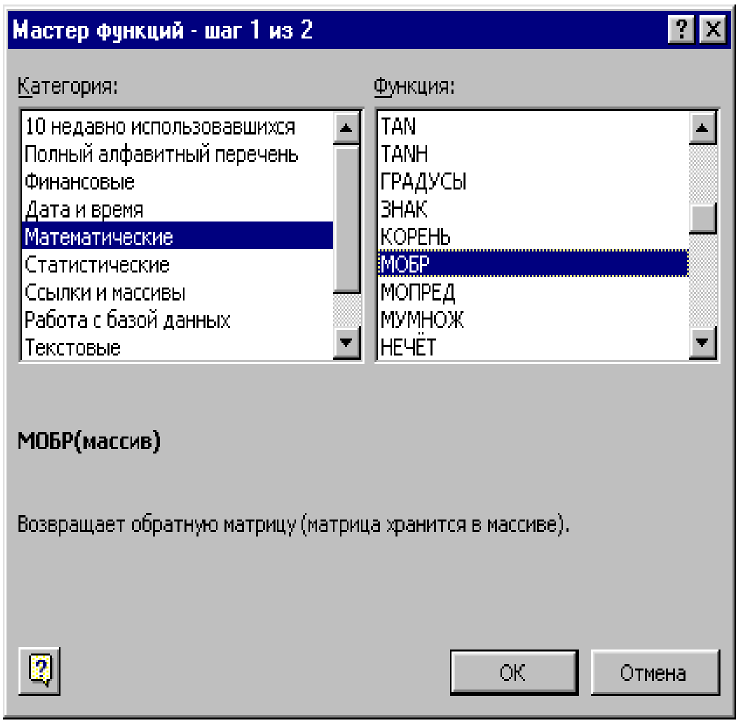


Рис. 3.2

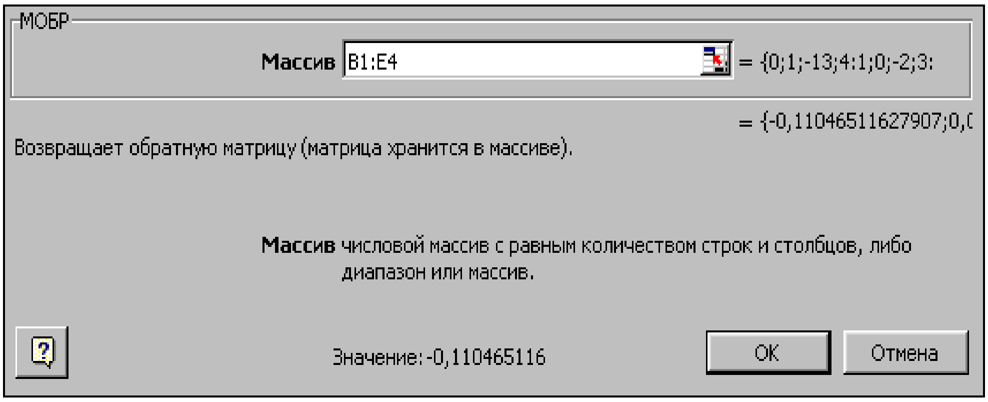


Рис. 3.3

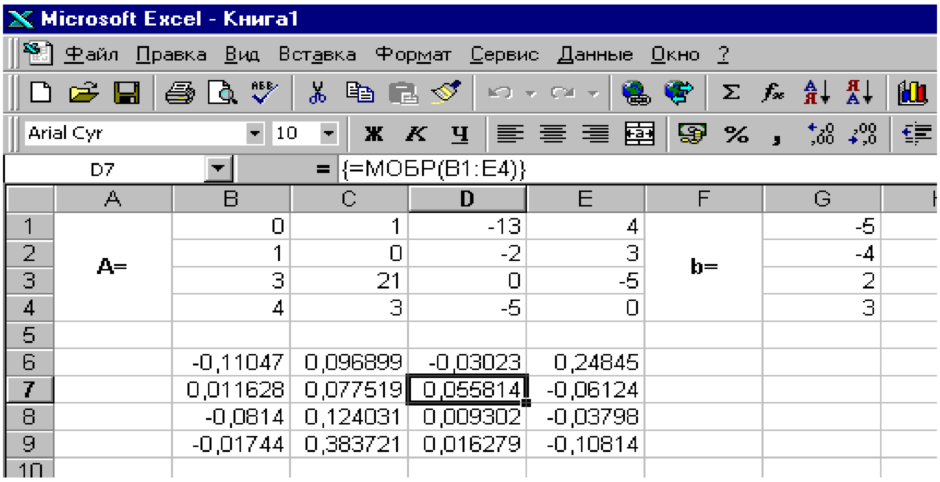


Рис. 3.4

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор **b**. Выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например **H6:H9**. Обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МУМНОЖ,** которая предназначена для умножения матриц. Напомним, что умножение матриц происходит по правилу строка на столбец и матрицу **A** можно умножить на матрицу **B** только в том случае, если количество столбцов матрицы **A** равно количеству строк матрицы **B**. Кроме того, при умножении матриц важен порядок сомножителей, т.е. **AB≠BA**

Перейдём ко второму шагу мастера функций. Появившееся диалоговое окно (рис. 3.5) содержит два поля ввода **Массив1** и **Массив2**. В поле **Массив1** необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае **B6:E9** (обратная матрица), а в поле **Массив2** ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае **G1:G4** (вектор **b**).

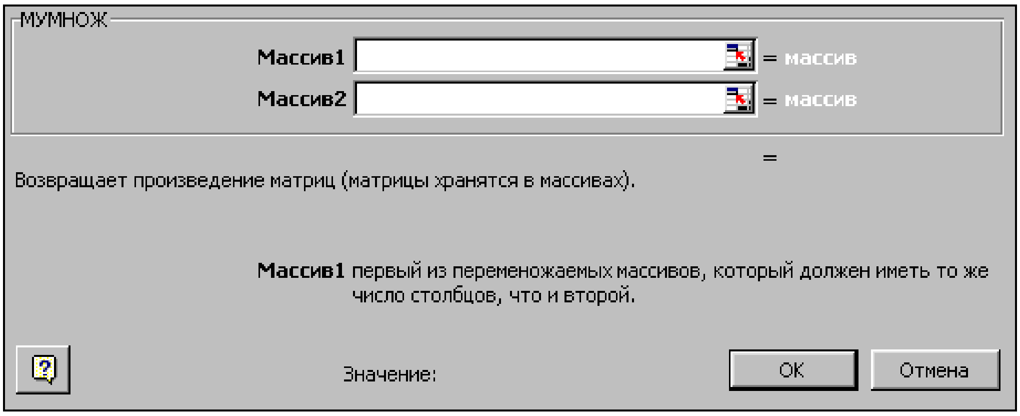


Рис. 3.5

Если поля ввода заполнены, можно нажать кнопку **OK.** В первой ячейке выделенного диапазона появится соответствующее число результирующего вектора. **Для того чтобы получить весь вектор, необходимо нажать клавишу F2, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае результаты вычислений (вектор **x)**, находится в ячейках **H6:H9**.

Для того чтобы проверить, правильно ли решена система уравнений, необходимо умножить матрицу **A** на вектор **x** и получить в результате вектор **b.** Умножение матрицы **A** на вектор **x** осуществляется при помощи функции **МУМНОЖ(B1:E4;H6:H9)**, так как было описанной выше.

В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид изображенный на рис. 3.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5		Проверка	-5
2		1	0	-2	3		-4			-4
3		3	21	0	-5		2			2
4		4	3	-5	0		3			3
5										
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845		x=	0,849612		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124			-0,44031		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798			-0,1845		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814			-1,73953		

Рис. 3.6

<u>ПРИМЕР 3.2.</u> Решить систему из <u>ПРИМЕРА 3.1</u> методом Крамера.

Введём матрицу **A** и вектор **b** на рабочий лист. Кроме того, сформируем четыре вспомогательные матрицы, заменяя последовательно столбцы матрицы **A** на столбец вектора **b (**рис. 3.7).

Для дальнейшего решения необходимо вычислить определитель матрицы **A**. Установим курсор в ячейку **I10** и обратимся к мастеру функций. В категории **Математические** выберем функцию **МОПРЕД,** предназначенную для вычисления определителя матрицы, и перейдём ко второму шагу мастера функций. Диалоговое окно, появляющееся на втором шаге содержит поле ввода **Массив.** В этом поле указывают диапазон матрицы, определитель которой вычисляют. В нашем случае это ячейки **B1:E4**.

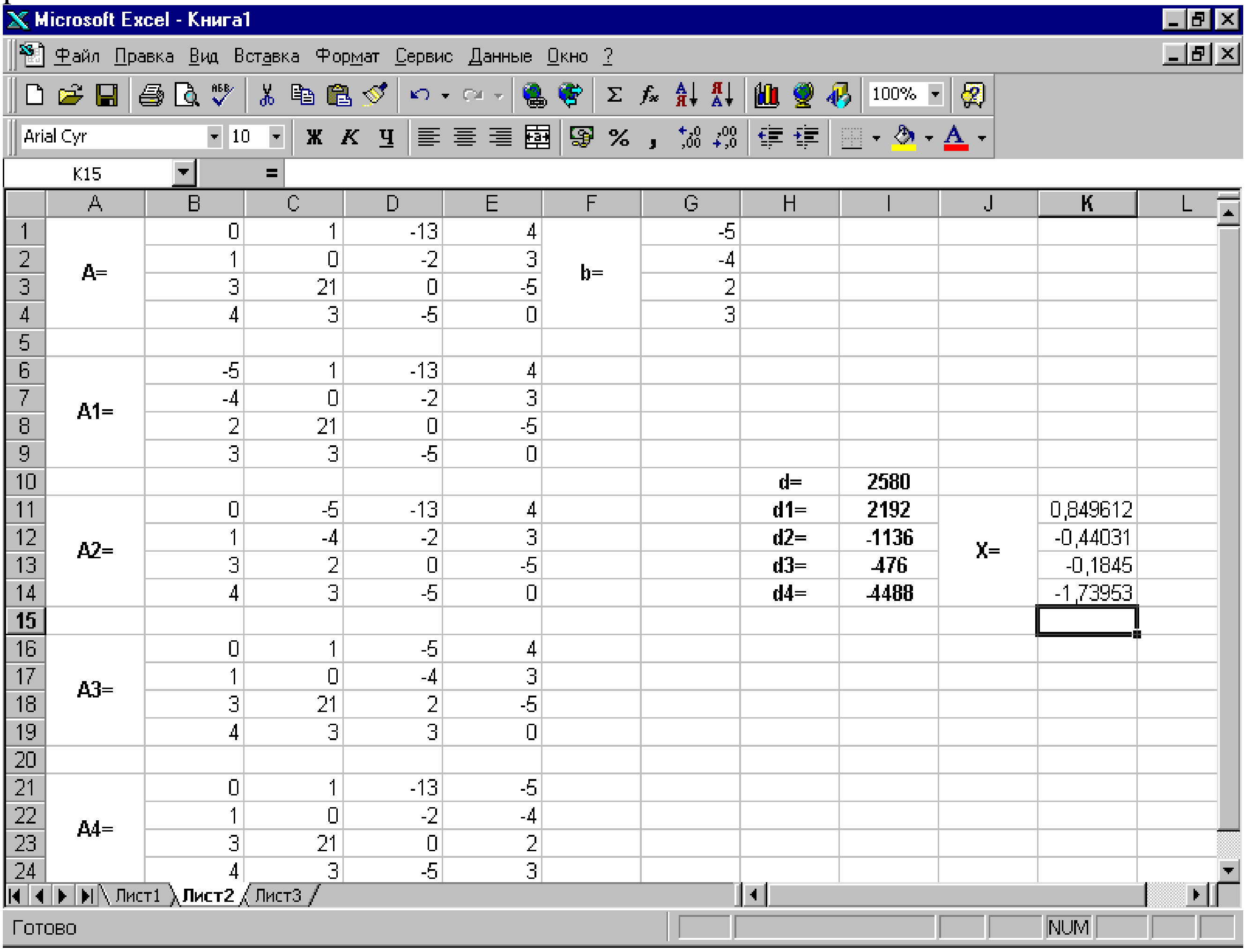
Для вычисления вспомогательных определителей введем формулы:

I11=МОПРЕД(B6:E9), I12=МОПРЕД(B11:E14),

I13=МОПРЕД(B16:E19), I14=МОПРЕД(B21:E24).

В результате в ячейке **I10** хранится главный определитель, а в ячейках **I11:I14** – вспомогательные.

Воспользуемся формулами Крамера и разделим последовательно вспомогательные определители на главный. В ячейку **K11** введём формулу **=I11/I10**. Затем скопируем её содержимое в ячейки **K12**, **K13** и **K14**. Система решена.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		0	1	-13	4		-5					
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4					
3		3	21	0	-5		2					
4		4	3	-5	0		3					
5												
6		-5	1	-13	4							
7	A1=	-4	0	-2	3							
8		2	21	0	-5							
9		3	3	-5	0							
10								d=	2580			
11		0	-5	-13	4			d1=	2192		0,849612	
12	A2=	1	-4	-2	3			d2=	-1136	X=	-0,44031	
13		3	2	0	-5			d3=	-476		-0,1845	
14		4	3	-5	0			d4=	-4488		-1,73953	
15												
16		0	1	-5	4							
17	A3=	1	0	-4	3							
18		3	21	2	-5							
19		4	3	3	0							
20												
21		0	1	-13	-5							
22	A4=	1	0	-2	-4							
23		3	21	0	2							
24		4	3	-5	3							

Рис. 3.7

ПРИМЕР 3.3. Вычислить матрицу C по формуле: $C=A^2+2AB$, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & -2\\ 2 & -13 & 3\\ 11 & 2 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 11\\ 4 & 5 & 5\\ 11 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

Введем исходные данные на рабочий лист (рис. 3.8).

Для умножения матрицы **A** на матрицу **B,** выделим диапазон **B5:D7** и воспользуемся функцией **МУМНОЖ(B1:D3;G1:I3)**.

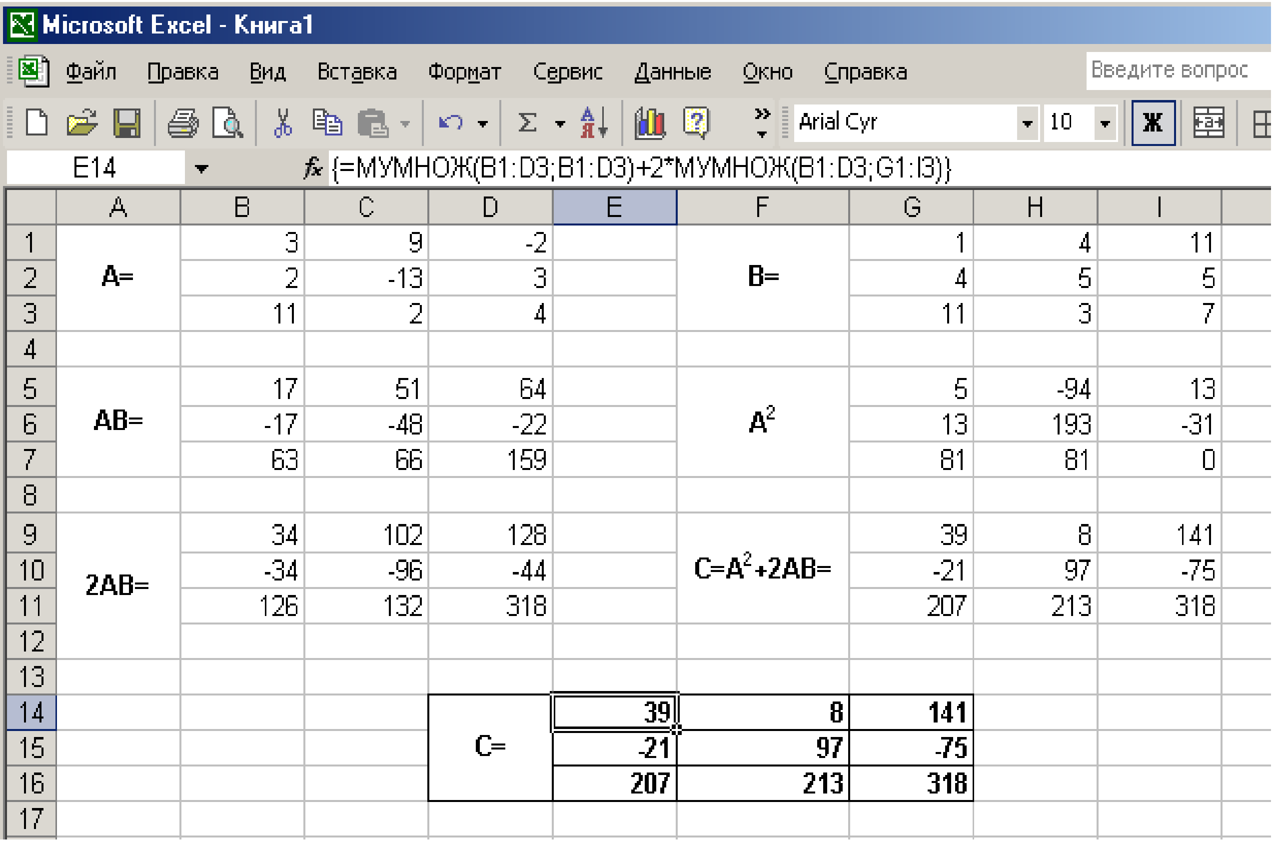
Результат вычисления **A^2=A*A** поместим в ячейки **G5:I7,** воспользовавшись формулой **МУМНОЖ(B1:D3;B1:D3).**

Умножение (деление) матрицы на число можно выполнить при помощи элементарных операций. В нашем случае необходимо умножить матрицу из диапазона **B5:D7** на число 2. Выделим ячейки **B9:D11** и введем формулу =2***B5:D7.**

Сложение (вычитание) матриц выполняется аналогично. Например, выделим диапазон **G9:I11** и введем формул **=B9:D11+ G5:I7**.

Для получения результата в обоих случаях необходимо нажать комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter.**

Кроме того, в строке формул рабочего листа, изображенного на рис. 3.8, показано как можно вычислить матрицу **C** одним выражением.

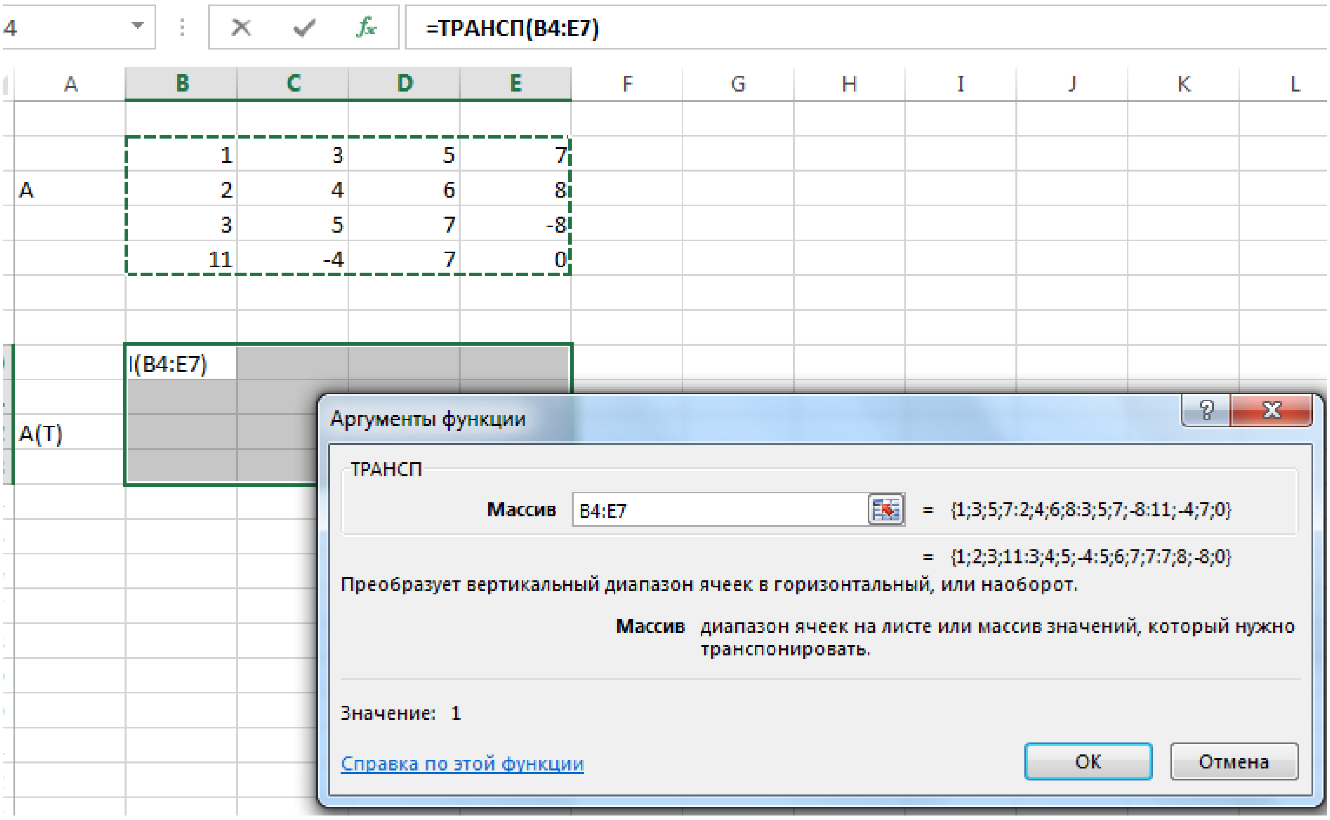


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		3	9	-2			1	4	11
2	A=	2	-13	3		B=	4	5	5
3		11	2	4			11	3	7
4									
5		17	51	64			5	-94	13
6	AB=	-17	-48	-22		A^2	13	193	-31
7		63	66	159			81	81	0
8									
9		34	102	128			39	8	141
10	2AB=	-34	-96	-44		$C=A^2+2AB=$	-21	97	-75
11		126	132	318			207	213	318
12									
13									
14					39	8	141		
15				C=	-21	97	-75		
16					207	213	318		
17									

Рис. 3.8

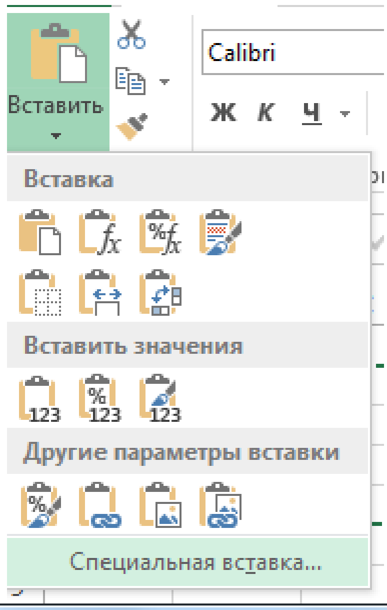
Для транспонирования матрицы в Excel применяется функция ТРАНСП(массив). Для транспонирования матрицы вначале выделяем диапазон ячеек под результирующую матрицу, затем вызываем мастер функции, в категории Сссылки и массивы выбираем функцию ТРАНСП и задаем в качестве аргумента-массив – диапазон ячеек с исходной матрице. Пример работы с функцией показан ниже.

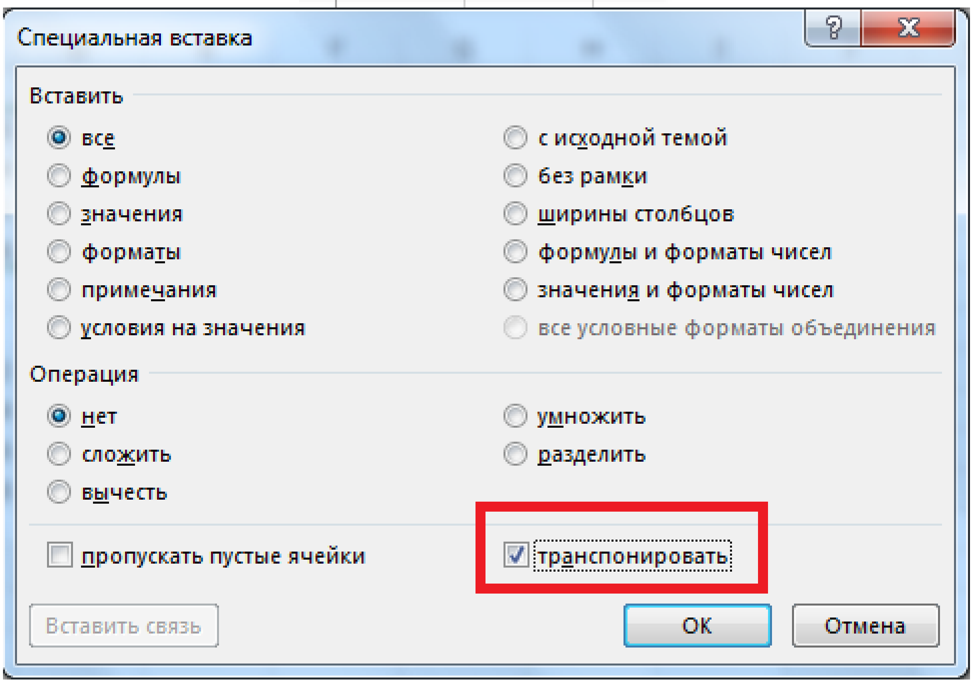
Для получения результата необходимо нажать комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter.**



Также матрицу можно транспонировать с помощью инструмента **Специальная вставка**. Для этого выделите вначале диапазон с исходной матрицей и скопируйте информацию в буфер обмена (Правка – Копировать или Ctrl+C). Затем выделите ячейку – начало диапазона транспонированной матрицы и выполните Правка – Специальная вставка в Excel 2003 или раскройте группу Вставить в Excel 2007-2016 и выберите команду Специальная вставка…

В открывшемся окне включите флажок в строке **Транспонировать.**


Calibri
Вставить
Ж К Ч
Вставка
Вставить значения
123
Другие параметры вставки
Специальная вставка...


Специальная вставка
Вставить
все
формулы
значения
форматы
примечания
условия на значения
с исходной темой
без рамки
ширины столбцов
формулы и форматы чисел
значения и форматы чисел
все условные форматы объединения
Операция
нет
сложить
вычесть
умножить
разделить
пропускать пустые ячейки
транспонировать
Вставить связь
ОК
Отмена