Методические рекомендации к выполнению задания 3

Решение *систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*.

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Эту систему можно представить в матричном виде: **AX=b**, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы уравнений;

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор неизвестных, $$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – вектор правых частей.

При выполнении лабораторной работы систему линейных алгебраических уравнений необходимо будет решать методом обратной матрицы и методом Крамера. Вспомним основные формулы, используемые в этих методах.

Метод обратной матрицы.

Систему линейных алгебраических уравнений **Ax=b** умножим слева на матрицу, обратную к **A**. Система уравнений примет вид:

$\mathbf{A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b}$, $\mathbf{E \cdot x = A^{-1} \cdot b}$, (E – единичная матрица)

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\mathbf{x = A^{-1} \cdot b}$.

Метод Крамера.

В этом случае неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$$

где Δ – определитель матрицы **A**, Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы **A** путем замены i-го столбца вектором **b**.

Обратите внимание на особенность работы с матричными формулами: необходимо предварительно выделять область, в которой будет храниться результат, а после получения результата преобразовывать его к матричному виду, нажав клавиши **F2** и **Ctrl+Shift+Enter**.

Теперь рассмотрим решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера на следующих примерах.

Пример 1.

Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_2 \ -13x_3 + 4x_4 \ = \ -5 \\ x_1 \ -2x_3 + 3x_4 \ = \ -4 \\ 3x_1 + 21x_2 \ -5x_4 \ = \ 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \ = \ \ 5 \end{cases}.$$

В этом случае матрица коэффициентов **A** и вектор свободных коэффициентов **b** имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -13 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 21 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Введём матрицу **A** и вектор **b** в рабочий лист MS Excel (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	-13	4		-5	
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4	
3		3	21	0	-5		2	
4		4	3	-5	0		3	
5								

Рисунок 1

В нашем случае матрица **A** находится в ячейках **B1:E4**, а вектор **b** в диапазоне **G1:G4**. Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к **A**. Для этого выделим ячейки для хранения обратной матрицы (**это нужно сделать обязательно!!!**); пусть в нашем случае это будут ячейки **B6:E9**. Теперь обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МОБР,** предназначенную для вычисления обратной матрицы (рис. 2), щелкнув по кнопке **OK**, перейдём ко второму шагу мастера функций. В диалоговом окне, появляющемся на втором шаге мастера функций, необходимо заполнить поле ввода **Массив** (рис. 3). Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица - в нашем случае **B1:E4**. Данные в поле ввода **Массив** можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши.

Если поле **Массив** заполнено, можно нажать кнопку **OK.** В первой ячейке, выделенного под обратную матрицу диапазона, появится некое число. **Для того чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать**

клавишу F2 для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter. В нашем случае рабочая книга MS Excel примет вид изображенный на рис. 4.

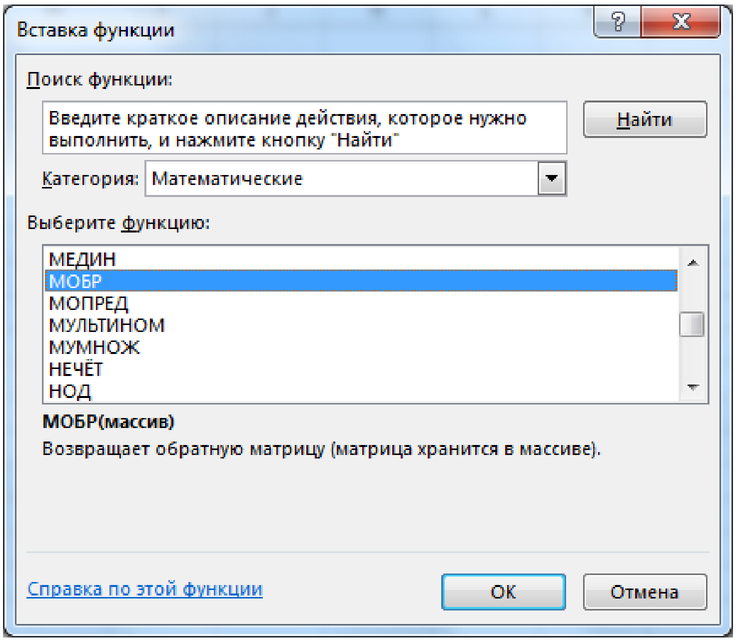


Рисунок 2

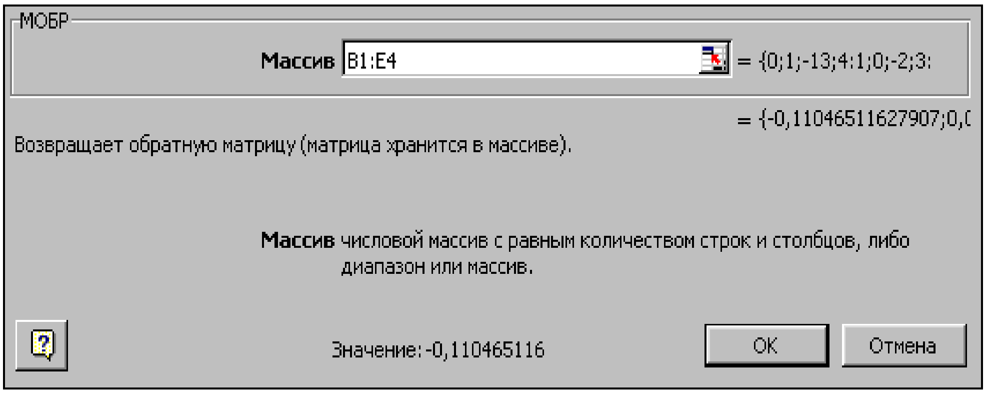


Рисунок 3

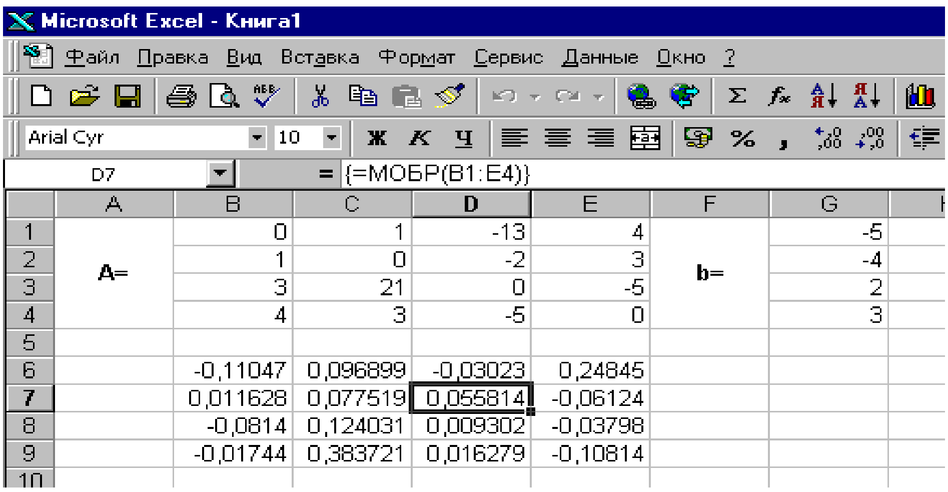


Рисунок 4

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор

b. Выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например **H6:H9**. Обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МУМНОЖ,** которая предназначена для умножения матриц. Напомним, что умножение матриц происходит по правилу строка на столбец и матрицу **А** можно умножить на матрицу **В** только в том случае, если количество столбцов матрицы **А** равно количеству строк матрицы **В**. Кроме того, при умножении матриц важен порядок сомножителей, т.е. **AB≠BA**

Перейдём ко второму шагу мастера функций. Появившееся диалоговое окно (рис. 5) содержит два поля ввода **Массив1** и **Массив2**. В поле **Массив1** необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае **B6:E9** (обратная матрица), а в поле **Массив2** ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае **G1:G4** (вектор **b**).

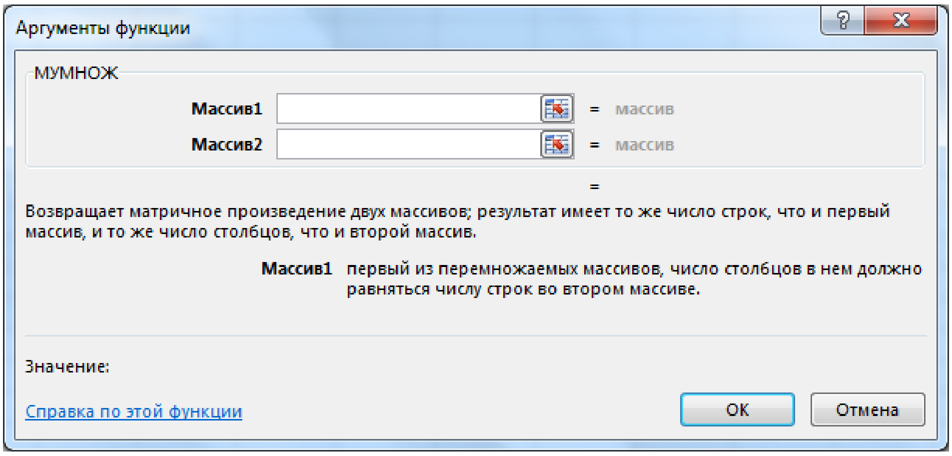


Рисунок 5

Если поля ввода заполнены, можно нажать кнопку **OK.** В первой ячейке выделенного диапазона появится соответствующее число результирующего вектора. **Для того чтобы получить весь вектор, необходимо нажать клавишу F2, а затем одновременно клавиши Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае результаты вычислений (вектор **x)**, находится в ячейках **H6:H9**.

Для того чтобы проверить, правильно ли решена система уравнений, необходимо умножить матрицу **A** на вектор **x** и получить в результате вектор **b.** Умножение матрицы **A** на вектор **x** осуществляется при помощи функции **МУМНОЖ(B1:E4;H6:H9)**, так как было описанной выше.

В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид изображенный на рис. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		0	1	-13	4		-5			-5
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4		Проверка	-4
3		3	21	0	-5		2			2
4		4	3	-5	0		3			3
5										
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845			0,849612		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124		x=	-0,44031		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798			-0,1845		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814			-1,73953		

Рисунок 6

<u>Пример 2.</u>

Решить систему из примера 1 методом Крамера.

Введём матрицу **A** и вектор **b** на рабочий лист. Кроме того, сформируем четыре вспомогательные матрицы, заменяя последовательно столбцы матрицы **A** на столбец вектора **b (**рис. 7).

Для дальнейшего решения необходимо вычислить определитель матрицы **A**. Установим курсор в ячейку **I10** и обратимся к мастеру функций. В категории **Математические** выберем функцию **МОПРЕД,** предназначенную для вычисления определителя матрицы, и перейдём ко второму шагу мастера функций. Диалоговое окно, появляющееся на втором шаге содержит поле ввода **Массив.** В этом поле указывают диапазон матрицы, определитель которой вычисляют. В нашем случае это ячейки **B1:E4**.

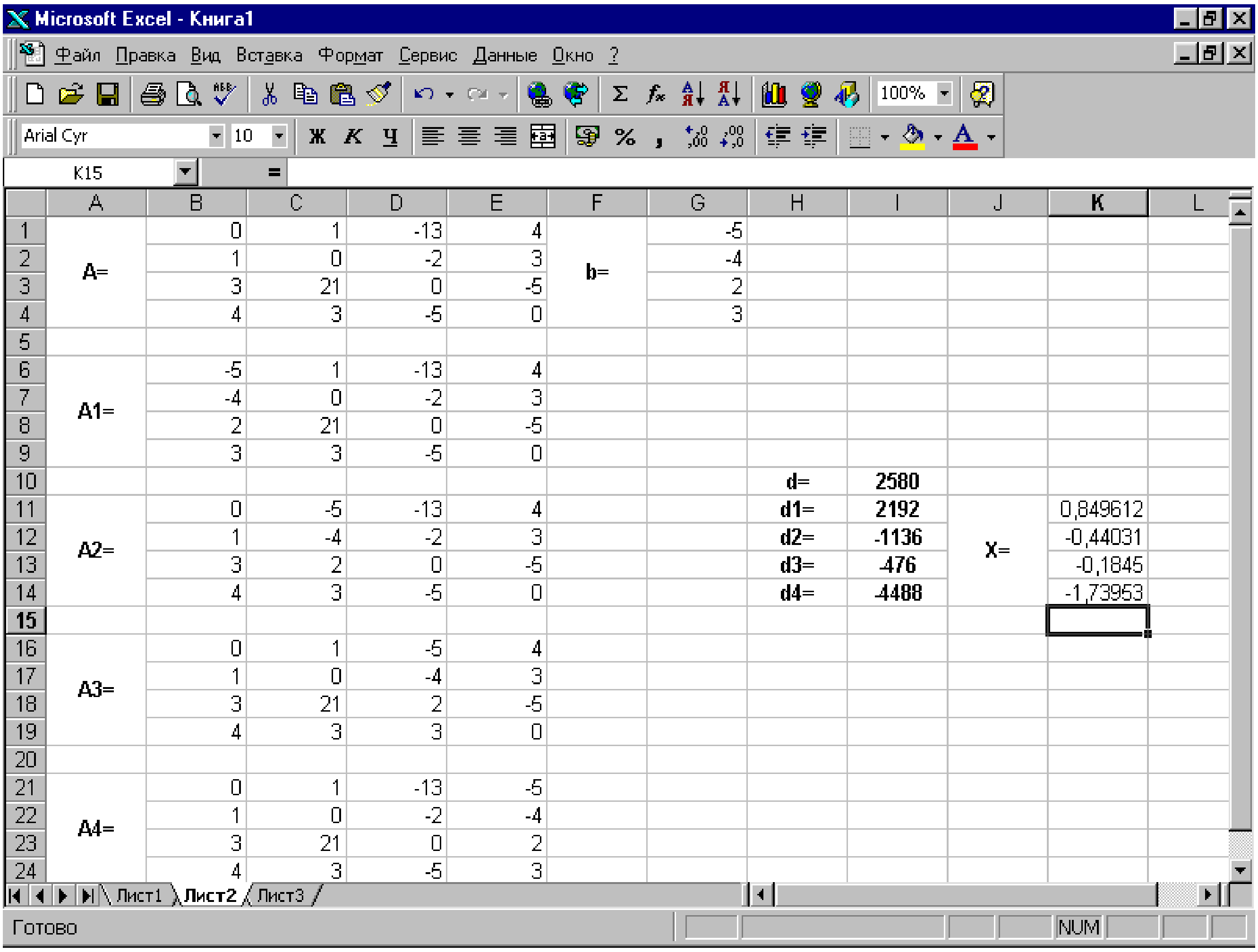
Для вычисления вспомогательных определителей введем формулы:

I11=МОПРЕД(B6:E9), I12=МОПРЕД(B11:E14),

I13=МОПРЕД(B16:E19), I14=МОПРЕД(B21:E24).

В результате в ячейке **I10** хранится главный определитель, а в ячейках **I11:I14** – вспомогательные.

Воспользуемся формулами Крамера и разделим последовательно вспомогательные определители на главный. В ячейку **K11** введём формулу **=I11/I10**. Затем скопируем её содержимое в ячейки **K12**, **K13** и **K14**. Система решена.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		0	1	-13	4		-5					
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4					
3		3	21	0	-5		2					
4		4	3	-5	0		3					
5												
6		-5	1	-13	4							
7	A1=	-4	0	-2	3							
8		2	21	0	-5							
9		3	3	-5	0							
10								d=	2580			
11		0	-5	-13	4			d1=	2192		0,849612	
12	A2=	1	-4	-2	3			d2=	-1136	X=	-0,44031	
13		3	2	0	-5			d3=	-476		-0,1845	
14		4	3	-5	0			d4=	-4488		-1,73953	
15												
16		0	1	-5	4							
17	A3=	1	0	-4	3							
18		3	21	2	-5							
19		4	3	3	0							
20												
21		0	1	-13	-5							
22	A4=	1	0	-2	-4							
23		3	21	0	2							
24		4	3	-5	3							

Рисунок 7

Пример 3.

Вычислить матрицу С по формуле: $C=A^2+2AB$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 2 & -13 & 3 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 5 \\ 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Введем исходные данные на рабочий лист (рис. 8).

Для умножения матрицы **А** на матрицу **В,** выделим диапазон **B5:D7** и воспользуемся функцией **МУМНОЖ(B1:D3;G1:I3)**.

Результат вычисления **A^2=A*A** поместим в ячейки **G5:I7, воспользовавшись формулой МУМНОЖ(B1:D3;B1:D3).**

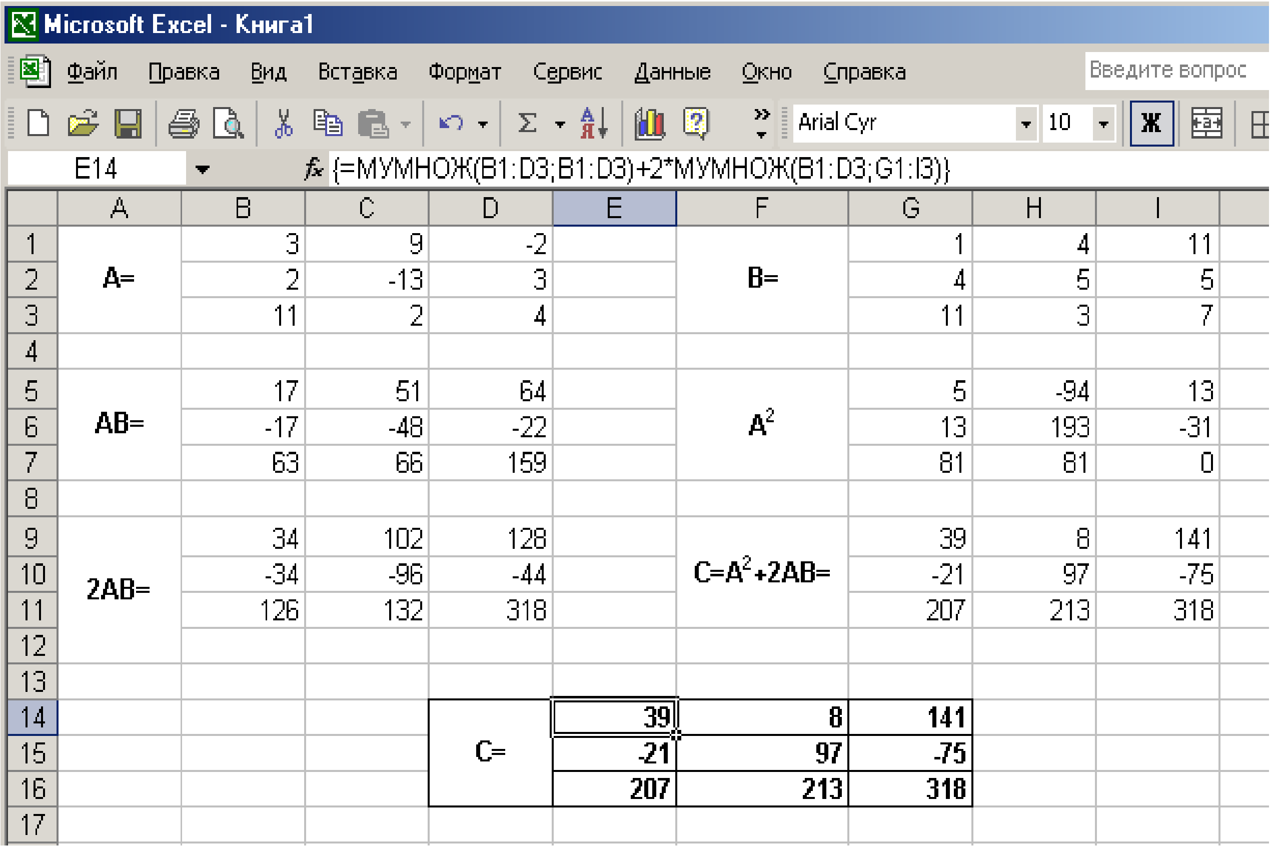
Умножение (деление) матрицы на число можно выполнить при помощи элементарных операций. В нашем случае необходимо умножить матрицу из диапазона **B5:D7** на число 2. Выделим ячейки **B9:D11** и введем формулу =2***B5:D7.**

Сложение (вычитание) матриц выполняется аналогично. Например, выделим диапазон **G9:I11** и введем формул **=B9:D11+ G5:I7**.

Для получения результата в обоих случаях необходимо нажать комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter.**

Кроме того, в строке формул рабочего листа, изображенного на рис.

3.8, показано как можно вычислить матрицу **C** одним выражением.



Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Введите вопрос

Arial Cyr 10 Ж

E14 fx {=МУМНОЖ(B1:D3;B1:D3)+2*МУМНОЖ(B1:D3;G1:I3)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		3	9	-2			1	4	11
2	A=	2	-13	3		B=	4	5	5
3		11	2	4			11	3	7
4									
5		17	51	64			5	-94	13
6	AB=	-17	-48	-22		A^2	13	193	-31
7		63	66	159			81	81	0
8									
9		34	102	128			39	8	141
10	2AB=	-34	-96	-44		$C=A^2+2AB=$	-21	97	-75
11		126	132	318			207	213	318
12									
13									
14					**39**	**8**	**141**		
15				C=	**-21**	**97**	**-75**		
16					**207**	**213**	**318**		
17									

Рисунок 8