Лекция №1.

Представление информации в компьютере. Системы счисления

Вычислительные машины могут быть построены на базе любой системы счисления, но наиболее естественным электронным способом счета является способ "есть сигнал / нет сигнала", поэтому в современных ЭВМ используется преимущественно двоичная система счисления, основанная на двух цифрах 0 и 1 (два состояния значительно легче различить, чем 10). Эта тема будет посвящена переводу между различными системами счисления.

1.1. Перевод целых чисел

Числа могут быть записаны в различных системах счисления. Наиболее привычна для нас десятичная система счисления, в которой принят счет десятками и используется 10 основных цифр (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Размещая эти цифры на различных позициях, можно выразить любое число.

По такому принципу можно построить систему счисления с произвольным основанием b.

Любое целое число N, заданное в b-ичной системе счисления, можно записать в развернутом виде:

$$N = P_b = (P_n P_{n-1} \ldots P_1 P_0)_b,$$

$$N = P_n b^n + P_{n-1} b^{n-1} + \ldots + P_1 b + P_0 = \sum_{i=0}^{n} P_i b^i$$

b – целое положительное фиксированное число (основание системы счисления);

P_i – целое число ($0 \le P_i \le b-1, i = 0,1,2,\ldots,n$) - называемое позиционной цифрой или разрядом.

Например, $(743)_{10}=7\cdot10^2 +4\cdot10^1 +3\cdot10^0=700+40+3=743$

Правильная дробь записывается в развернутом виде так:

$$N = (0,P)_b = (0,P_{-1} P_{-2} \ldots P_m)_b,$$

$$N = P_{-1} b^{-1} + P_{-2} b^{-2} + \ldots + P_{-m} b^{-m}$$

Например,$(0,517)_{10}=5\cdot10^{-1} +1\cdot10^{-2} +7\cdot10^{-3}=0,5+0,01+0,007=0,517$

Рассмотрим системы с основанием 2,8,10,16.

Рассмотрим на примерах как перевести двоичное число в более привычную десятичную систему счисления.

$(101101)_2=1\cdot2^5+0\cdot5^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot5^1+1\cdot2^0=32+8+4+1=(45)_{10}$

$(10101,1101)_2=1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0 +1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+0\cdot2^{-3}+1\cdot2^{-4}=$

$=16+4+1+1/2+1/4+1/16=21+13/16=(21,8125)_{10}$

Существенным недостатком двоичной системы счисления является громоздкая запись чисел. Для упрощения записи двоичных чисел могут быть использованы восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. Запись чисел в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления приведена в таблице 1.1.

Двоичная система связана с восьмеричной и шестнадцатеричной соотношениями: $2^3=8$ и $2^4=16$, т.е. цифры восьмеричной системы можно представить двоичными триадами, шестнадцатеричной – тетрадами, что облегчает взаимный перевод.

Таблица 1.1

ЧИСЛО				
десятичное	двоичное	Восьмеричное	двоичное	шестнадцатеричное
0	0000	0	0000	0
1	0001	1	0001	1
2	0010	2	0010	2
3	0011	3	0011	3
4	0100	4	0100	4
5	0101	5	0101	5
6	0110	6	0110	6
7	0111	7	0111	7
8	1000	10	1000	8
9	1001	11	1001	9
10	1010	12	1010	A
11	1011	13	1011	B
12	1100	14	1100	C
13	1101	15	1101	D
14	1110	16	1110	E
15	1111	17	1111	F

Например, $(110100101)_2 \rightarrow (110\ \ 100\ \ 101)_2 \rightarrow (645)_8$

$(11011101)_2 \rightarrow (011\ \ 011\ \ 101) \rightarrow (335)_8$

$(101111101111)_2 \rightarrow (1011\ \ 1110\ \ 1111)_2 \rightarrow (BEF)_{16}$

$(10111011000)_2 \rightarrow (0101\ \ 1101\ 1000)_2 \rightarrow (5D8)_{16}$

Для того чтобы перевести целое число из десятичной системы счисления в другую необходимо выполнить следующие действия:

1) поделить данное число на основание новой системы счисления;
2) перевести остаток от деления в новую систему счисления; получается младший разряд нового числа;
3) если частное от деления больше основания новой системы, продолжать деление, как указано в п.1; новый остаток, переведенный в новую систему счисления, дает второй разряд числа и т.д.

Пример. Перевести число 256 из десятичной системы счисления в восьмеричную. (Далее, будем записывать кратко $(256)_{10} \rightarrow (?)_8$)

Решение

```
 256  | 8
-256    32 | 8
   0   -32   4
         0
```

Ответ. $(256)_{10} \rightarrow (400)_8$. Сделаем проверку, чтобы убедится в правильности перевода: $(400)_8 = 4 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 256 + 0 + 0 = (256)_{10}$

Пример. Пусть необходимо выполнить перевод $(397)_{10} \rightarrow (?)_{16}$
Решение:

```
 397  | 16
-384    24 | 16
  13   -16    1
         8
```

Ответ: $(397)_{10} \rightarrow (18D)_{16}$.
Проверка: $(18D)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 256 + 128 + 13 = (397)_{10}$

Пример. Выполнить преобразование $(25)_{10} \rightarrow (?)_2$
Решение

```
 25  | 2
-24    12 | 2
  1   -12    6 | 2
        0   -6    3 | 2
             0   -2   1
                  1
```

Ответ: $(25)_{10} \rightarrow (11001)_2$. Сделаем проверку:
$(25)_{10} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 1 = (25)_{10}$

1.2. Перевод вещественных чисел

При переводе вещественных чисел, необходимо отдельно переводить целую и дробную часть. Правило перевода дробей из одной системы счисления в другую заключается в выполнении следующих действий:

1) умножить дробную часть числа на основание системы счисления;
2) в полученном произведении выделить целую часть числа (это будет старшим разрядом искомого числа);
3) дробную часть произведения снова умножить на основание новой системы счисления; целая часть произведения будет следующим разрядом дробной части искомого числа;
4) п.3 повторить до получения необходимого количества разрядов искомого числа.

Пример. Выполнить перевод $(0{,}784)_{10} \rightarrow (?)_2$, $0{,}6125_{10} \rightarrow (?)_8$ и $(0{,}378)_{10} \rightarrow (?)_{16}$. Оставить четыре знака после запятой.

	0,784		0,6125		0,378
×	2	×	8	×	16
1	568	4	9000	6	046
×	2	×	8	×	16
1	136	7	2000	0	768
×	2	×	8	×	16
0	272	1	6000	12	288
×	2	×	8	×	16
0	544	4	8000	4	608
×	2				
1	088				

Результат получаем, читая цифры сверху вниз:

$(0{,}784)_{10} \rightarrow (0{,}1100)_2$

$0{,}6125_{10} \rightarrow (0{,}4714)_8$

$(0{,}378)_{10} \rightarrow (0{,}60C4)_{16}$.